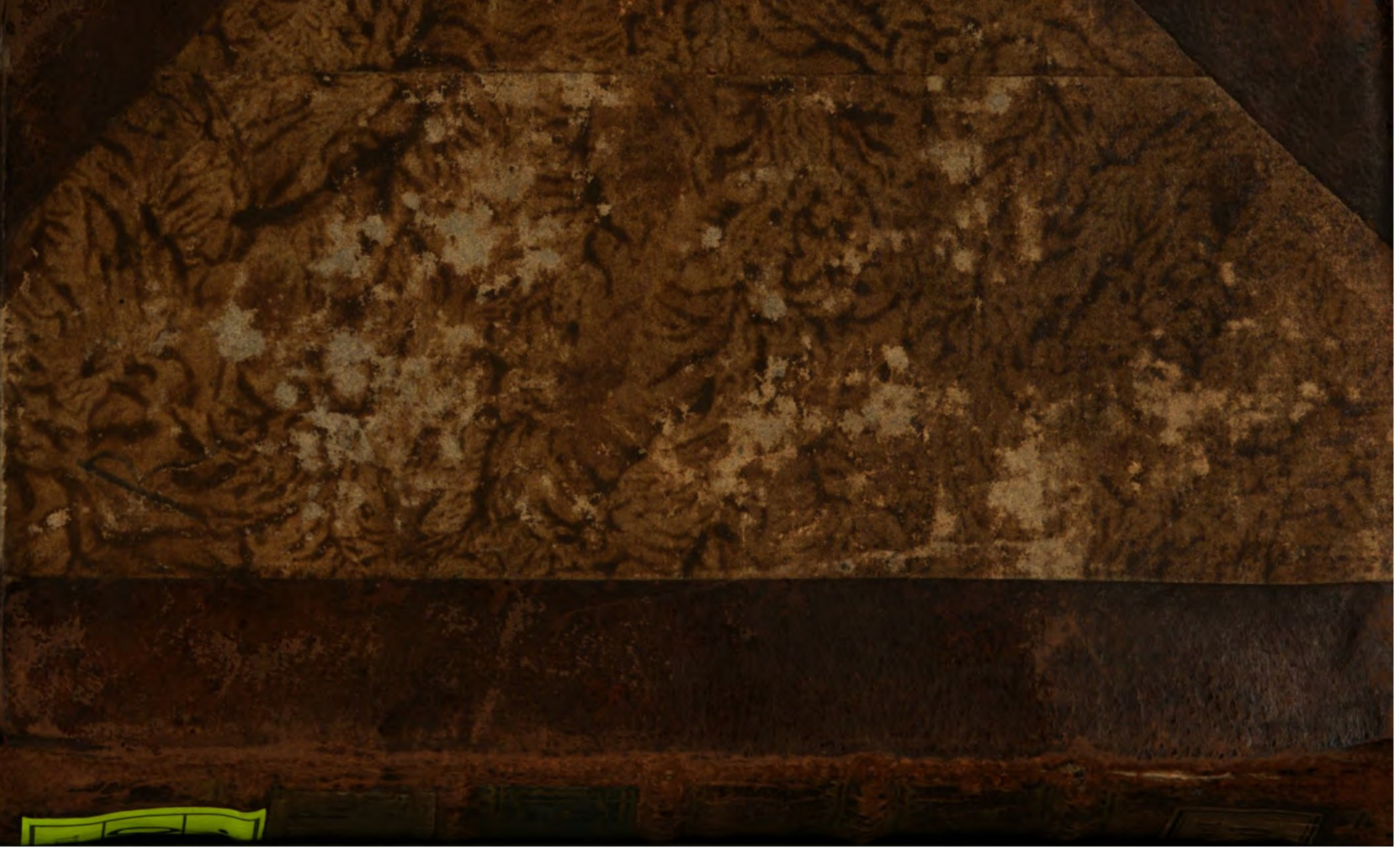


r. U. 90. – 1

<36635601640011

<36635601640011

Bayer. Staatsbibliothek

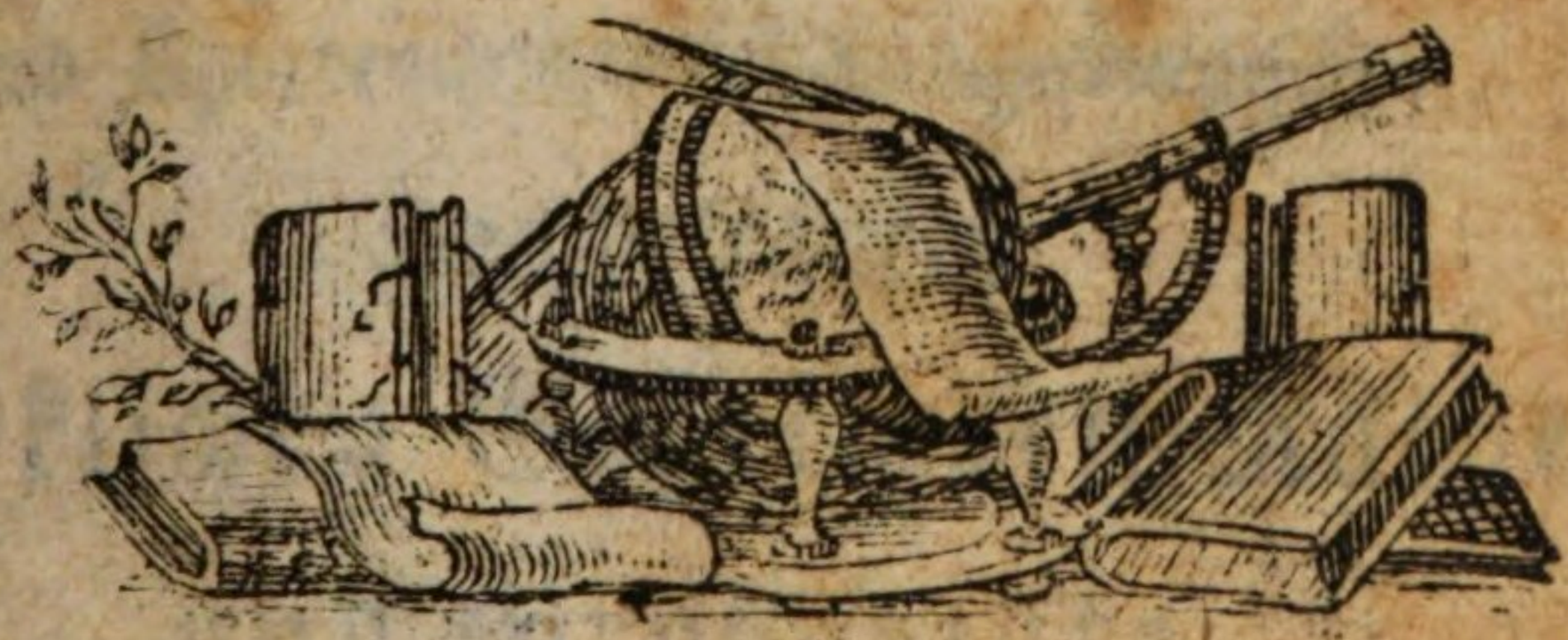
Aftron.

C. 268.

Mathesis. Astronomica. Scripta
varia Astronomiam illustr.

CAO.

Astronomische
Abhandlungen
zu weiterer Ausführung
der
astronomischen Anfangsgründe
abgefaßt
von
Abraham Gotthelf Kästner



Erste Sammlung.

Göttingen
im Verlage der Wittwe Vandenhöck
1772.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Hochgebohrnen Freyherrn

Herrn

Ludwig Eberhard

von Gemmingen

Königlich-Großbritannischen

und Churbraunschweigisch-Lüneburgischen

Hochbetrauten

wirklichen Geheimden Rathe

und Großvoigte

der Georgaugustus Universität

zweyten Curator

Meinem gnädigsten Herrn

Hochgebohrner Freyherr
Gnädigster Herr
Hochgebietender Herr Geheimder Rath

Der gnädigste Schutz, den die hiesigen Anstalten zu Ausübung der Astronomie, seit langer Zeit, zu Göttingens vorzüglichem Ruhme genieſſen, verstattet mir; für Bemühungen geneigte Aufnahme zu hoffen, die ich, in gegenwärtigem Werke, zur Erweiterung und Ausbreitung dieser Wissenschaft angewandt habe, welche selbst einen grossen Theil, von Unsers Königs Majestät, erhabenen Vergnügungen ausmacht.

Ew. Hochfreyherrl. Excellenz von diesen Bemühungen Rechenschaft zu geben, verbindet mich, die besondere Aufmerksamkeit, welche Dieselben auf das Beste der Universität richten.

Daß Ew. Hochfreyherrl. Excellenz Sorgfalt für das gemeine Wohl, von der Universität, wie von dem ganzen Lande, viel Jahre lang möge verehret werden, sind die eifrigsten Wünsche, mit denen ich in tiefster Devotion verharre

Ew. Hochfreyherrlichen Excellenz

Göttingen
im September
1772.

unterthänigstgehorsamster
Abraham Gotthelf Kästner

Vorrede.

Die astronomischen Kenntnisse, sind nicht nur die weitläuftigsten und mannichfaltigsten, deren der menschliche Verstand fähig ist, sondern sie sind auch so in einander verwickelt, daß immer einige, zu ihrer Vollständigkeit andere voraussetzen, welche andern sich doch ohne die ersten, nicht erlangen lassen. Ein leichtes Beyspiel zu geben: Man muß jede gemessene Höhe durch die Refraction verbessern; und die Refraction, erkennt und bestimmt man durch Höhenmessungen.

Das würde nun wohl ein unastronomischer Logicus, eine offenbahre petitionem principii nennen: Aber wer den menschlichen Verstand leiten will, und die Mathe-

matik nicht kennt, in der es der menschliche Verstand gewiß weiter als irgendwo sonst gebracht hat; der gehört in eine Classe, mit unsern jezigen Modeschriftstellern von den schönen Künsten, die nie was Schönes gesehen haben, (lebendige Schönheiten nehme ich aus, um nicht unhöflich zu seyn.)

Von einer solchen Wissenschaft, wie ich die Astronomie beschrieben habe, jemanden dem sie noch neu ist, dergestalt zu belehren, daß er das Ganze übersieht, begreift wie man zu diesen Kenntnissen nach und nach gekommen ist, und wie sie sicher sind, ob man gleich oft, vorhergehende durch folgende die man erst aus den vorhergehenden erlangt hat, vollkommener macht; dazu ist zuerst ein kurzer Begriff der Wissenschaft nöthig, in dem die meisten Lehren, nur überhaupt so weit angezeigt sind, als erfodert wird sie zu verstehn, und zu begreifen wie man sich von ihrer Richtigkeit habe versichern können; Umständliche Untersuchungen, würden nicht nur die Aufmerksamkeit des Lernenden ermüden und zerstreuen, sondern selbst einander so durchkreuzen, daß er nicht allemahl wissen würde, ob er aus festen Gründen schlösse, oder aus Vor-

aus-

aussetzungen die er jezo auf Treu und Glauben annähme, und in der Folge, wieder nur aus dem was aus ihnen geschlossen hat, herleiten würde.

Daher ist auch in keinem Buche, welches die Astronomie besonders, und ausführlich abhandelt, der Vortrag so eingerichtet, daß in ihm, ein Anfänger mit aller Fähigkeit und Geduld versehen, von den ersten Kenntnissen, ordentlich zu den erhabensten geführt würde. Gregori, Cassini und la Caille fangen von der kopernikanischen Weltordnung an, und Hr. de la Lande, konnte die mathematische Lehrart desto weniger beobachten, je mehr er sich bemühte, die Astronomie, vollständig, deutlich, selbst unterhaltend, vorzutragen.

Daß ein grosses System der Astronomie, mit Beybehaltung der mathematischen Lehrart nicht ganz unmöglich sey, davon geben die Elementa Astronomiae in den Wolfischen lateinischen Anfangsgründen der Mathematik eine Probe. Soviel Ordnung, Deutlichkeit, Gründlichkeit, findet sich in keinem etwas ausführlichen Lehrbegriffe eines Ausländers. Aber Wolfs Beschäfftigungen mit der Philosophie, verstatteten ihm nicht,

seine mathematischen Lehrbücher, bey wiederhohlten Ausgaben, nach den Veränderungen welche die Wissenschaft indessen gehabt hatte zu ändern; sie waren also schon bey seinem Leben, um ein halbes Jahrhundert zu alt. Wer aber die Gedult hätte, in die erwähnte Astronomie, neuere Entdeckungen gehörigen Ortes einzuschieben, ihr Untersuchungen beyzufügen, die theils zu Wolfs Zeiten noch gar nicht bekannt waren, theils Ihm nicht so nöthig schienen, z. E. von der Attraction, Aberration, Nutation, statt der synthetischen Beweise analytische Rechnungen zu setzen u. s. w. der würde ein neues Almageſt verfertigen, wie nur Einsicht und anhaltender Fleiß eines Deutschen verfertigen kann.

Und in Deutschland würde dieses Almageſt keinen Verleger finden.

Zu gegenwärtigen Abhandlungen sind die Materialien so entstanden: Beym Durchlesen astronomischer Bücher, suchte ich die darinnen enthaltenen Lehren, mir aus den ersten Gründen, so kurz als es sich ohne Nachtheil der Ueberzeugung thun liesse herzuleiten, wahrzunehmen, wie sie konnten entdeckt werden, wenn der Schriftsteller sie nur bewiesen

hatte,

Vorrede.

hatte, Vorschriften, die jeder Verfasser, in einer ihm eignen Reihe von Schlüssen gelehrt hatte, als Folgerungen aus allgemeinen Sätzen zu vereinigen. Eigne astronomische Beschäfftigungen, veranlaßten mich auch zu Gedanken, die ich theils von Andern, bestätiget fand, theils Anderer ihren beyfügen konnte.

Diese Bemühungen glaubte ich könnten Jemanden nützlich seyn, der sich nur einen kurzen Begriff der Astronomie nach derselben jezigen Zustande, gehörig bekannt gemacht hätte, so wie ich den, in meinen mathematischen Anfangsgründen, abzufassen bemüht gewesen bin. Er findet hier Unterschiedenes ausgeführt, das sich dorten nur kurz anzeigen liesse, und weil er den Zusammenhang der ganzen Wissenschaft in Gedanken hat, so kann er Jedes an die gehörige Stelle setzen. Also bringt es ihm keinen Nachtheil, daß diese Aufsätze nicht der Ordnung eines Systems folgen: Mir aber, verstattet diese Freyheit, solche Ausarbeitungen nach der Ordnung bekannt zu machen, wie ich sie am besten vollendet zu haben glaube.

Jezo erscheinen drey von ihnen.

Die

Vorrede.

Die erste, enthält eigentlich nur trigonometrische Lehren, die ich meistens in den 19 u. die folgenden Sätze meiner Trigonometrie hätte bringen können, wenn ich damahls gewagt hätte, die Anwendung der Buchstabenrechnung auf die Trigonometrie so weitläuftig zu machen. Daß ich hierinnen in der That etwas furchtsamer gewesen bin, als ich hätte seyn sollen, das versichert mich der Beyfall, den meine dortigen Bemühungen erhalten haben. Man kann also gegenwärtige erste Abhandlung als eine Ergänzung der angezeigten Sätze meiner Trigonometrie ansehen. Sie enthält Vieles, das nicht nur in der Astronomie, sondern auch beym Feldmessen, und wo sonst Trigonometrie vorkömmt brauchbar ist, wovon man sich durch unterschiedliche in ihr vorkommende Lehren leicht überzeugen kann. Indessen habe ich eigentlich in sie nur das bringen wollen, wovon ich in den folgenden astronomischen Untersuchungen, einen Gebrauch gemacht hatte. Mit dem Beweise solcher Lehnsätze, wollte ich das Astronomische nicht zu oft unterbrechen; es war auch bequemer, sie gesammlet zu haben, als

als in einem Aufsatze der andere Gegenstände hätte, hin und her zerstreuet

Man wird daraus urtheilen, daß hier nicht etwa alle trigonometrische Formeln beysammen sind. Es ist gut eine solche vollständige Sammlung zu haben, zu meiner Absicht war sie nicht nöthig, und ich sehe sie an, wie ein geometrisches Buch nach Art der Alten, in dem eine Menge einzelner schöner Sätze stehn, ich aber beschwere mein Gedächtniß nicht mit ihnen, sondern finde lieber jeden allsdenn wenn ich ihn brauchen kann.

Warum ich in der zweyten Abhandlung eine sphärische Trigonometrie geliefert habe, wird man in den Vorerinnerungen dazu sehen.

In der That, hätte ich wegen der meisten Lehren welche diese Abhandlungen enthalten, mich auf andere Schriften berufen können.

Soviel ich weiß, ist Friedrich Christian Maier, einer der ersten, welche die analytischen Rechnungen auf die Trigonometrie angewandt haben. Seine Trigonometrica stehen im II. Tomo der Comment. Ac. Imp. Sc. Petrop. für 1727. Hr. Euler hat diesen Rechnungen, wie allen mit denen er sich beschafftiget, die bequemsten Einrichtungen

gen

gen gegeben, und nach ihm, sind die Gründe davon u. die vornehmsten Formeln, nicht nur von den Herrn v. Segner, Karsten, Tempelhof, und nur unlängst von Hr. P. Zumkley (*) in ihre Lehrbücher gebracht worden, sondern man hat sie auch in eignen Abhandlungen. Trigonometria methodo plana et facili exposita, eine Disputation des Hr.. Prof. Kies zu Tübingen 1760 gehalten, enthält beyde Trigonometrien auf analytische Formeln gebracht. Vorzügliche Sammlungen dieser Lehren, sind Hr. Prof. Klügels zu Helmstädt analytische Trigonometrie (†) und Hr. Pr. Brackenhofers zu Strasburg Sphaericorum Formulare (††) Wer diese, oder ähnliche Bücher, vollkommen inne hat, wird vielleicht meine beyden ersten Abhandlungen ganz überschlagen können, wenn er nicht etwa darinnen nachsehen will, ob er eines u. das andere z. E. die Differentialformeln der Dreyecke, kürzer und brauchbarer

(*) Matheseos elementaris principia; praelectionibus publicis scholar. infer. patriae Monasterienſis, accommodabat Casparus Zumkley e Soc. Iesu Math. Prof. Münster 1772.

(†) Braunschweig 1770.

(††) Argentorati 1770.

barer abgehandelt findet, als anderswo? Ob nicht einige Anwendungen z. E. auf die Fehler die beym Winkelmessen vorfallen können, noch seine Aufmerksamkeit verdienen? Ich glaubte aber auch Leser erwarten zu dürfen, die gern alle Lehren die ich im Folgenden voraussetze, auf einigen Bogen, nach meiner Art zusammengebracht sähen.

Die dritte Abhandlung, enthält lauter Untersuchungen aus der sphärischen Astronomie. Fast zu allen, veranlaßte mich ihr Gebrauch beym Observiren, und daß ich gern bey jeder sogleich ihren Gebrauch zeigen wollte, das ist die Ursache, warum manche Sätze, die ein blos theoretischer Schriftsteller zusammen gebracht hätte, hie durch practische Anwendungen des einen und des andern, sind getrennt worden. Die Ordnung in der diese theoretische Lehren nach einander folgen, ist die, wie sie nach uud nach zu den praktischen Vorschriften nöthig waren; Wer sie zusammen bringen will, darf sie nur im Inhalte aufsuchen.

Was zur Absicht dieser Abhandlung gehöriges in Hr. de la Lande Astronomie nach der zweyten Ausgabe, enthalten ist, wird man

hier-

Vorrede.

hier finden, nebst den Lehren anderer Schriftsteller, als Maupertuis, von dessen Astronomie Nautique kein Satz hie fehlt, Ludlams u. a. m.

Wie die astronomischen Werkzeuge, der Kenntniß ihres Baues gemäß, zu beurtheilen, zu prüfen und zu brauchen sind, das möchte etwa den Innhalt der nächsten Abhandlung machen, die ich auszufertigen gedenke. Göttingen im September 1772.

Innhalt

Innhalt der ersten Abhandlung

Trigonometrische u. a. analytische Formeln als Lehnsätze.

Vergleichungen zwischen den trigonometrischen §.
Linien, des einfachen, doppelten 1
und halben Bogens 7
Summen und Unterschiede von Sinussen u. Cosinussen
der Summe u. des Unterschiedes zweener Bogen 8
Einzelner Bogen Tangenten und Cotangenten, durch
Sinusse u. Cosinusse 13
von Summen u. Unterschieden zweener Bogen 20
Tangenten von Summen nnd Unterschieden, 22
durch die Sinusse der einzelnen Bogen 28
Summen u Unterschiede der Sinusse, durch Produkte 29
aus Sinussen der Summen u. Unterschiede 33
Dergleichen von Tangenten 34; 40
Zweene Winkel, aus ihrer Summe, 41
und der Verhältniß ihrer Sinusse zu finden 57
Logarithmen eigentlicher Brüche 59
durch einen bejahten und verneinten Theil ausgedruckt 63

Einen Winkel aus einer Gleichung zu finden, in der sein Sinus und sein Cosinus sind §. 69
Oder Tangente u. d. g. 81
Von kleinen Aenderungen der Winkel. 83
Wenn hier die Differentialformeln nicht sicher sind 84
Differentialformeln für Winkel 87
Einen Bogen der in Theilen des Kreises gegeben ist, in Theilen des Halbmessers auszudrücken u. umgekehrt 94
Logarithmen dazu 96
Bogen der so lang ist als der Halbmesser 102
Veränderungen der Winkel in Secunden auszudrucken 105
Differentialformeln für geradelinichte Dreyecke 108
Ob die Veränderungen Wachsen oder Abnehmen sind? 139
Durchzählung der Fälle, wo solche Veränderungen mit einander verglichen werden 144
Vorzug der Gleichungen vor Cotesens Lehrsätzen 143; 149; 162
Gebrauch bey den Fehlern im Feldmessen 153
Warum man in den Formeln nicht Sinus kleiner Bogen, sondern die Bogen selbst braucht? 158
Ob es bequemer ist die Aenderung nach den Formeln zu berechnen, oder die Rechnung von vornen zu wiederhohlen? 164
Einen Winkel in einer schiefen Ebene in den ihm zugehörigen horizontalen zu verwandeln 168
Gebrauch bey Feldmesserwerkzeugen 213
Bey Quadranten mit beweglichem Fernrohre 223
Mit unbeweglichem Fernrohre 224
Wenn des Quadranten Ebene nicht lothrecht steht 2 7
Wenn die beyden Winkel (168 selbst klein werden 232
Geometrische Sätze von schiefen Ebenen 243
Kein Winkel auf einer schiefen Ebene ist kleiner als der Unterschied der Neigungen seiner Schenkel 244
Wenn ein Schenkel lothrecht ist 246
Aus den Neigungen der Schenkel die Neigung der Ebene durch sie zu finden 247
Eine Linie in einer schiefen Ebene hat keine grössere Neigung als die Neigung der Ebene 269
Welche Linien gleiche Neigungen haben 271

Drey Linien haben nicht gleiche Neigungen 274
Die Frage (168) wenn die größte beyder Neigungen, die Neigung der Ebene ist 275

Innhalt der II. Abhandlung

Sphärische Trigonometrie

I. Cap. Hr. Eulers Formeln zu Auflösung schiefer Dreyecke. Vorher die Formeln der rechtwinklichten. Verzeichniß der vorkommenden Fälle 124 §
II. Cap. Differentialformeln sphärischer Dreyecke. Durchzählung dieser Formeln 92 §
III. Cap. Einige Anwendungen der sphärischen Trigonometrie.
Aus Rectascension u. Declination Länge u. Breite zu berechnen. 1 §.
Aus Länge und Breite, Rectascension u. Abweichung 2 §.
Mit einem Winkelmesser der schief steht und dessen Fernrohr ihm nicht parallel ist, den horizontalen Winkel zu finden. 3. §.

Innhalt der III. Abhandlung.

Man weiß Polhöhe, Abweichung eines Sterns und desselben Höhe, daraus sucht man, des Sterns Abstand vom Mittagskreise, Azimuth und parallactischen Winkel § 1
Ein Stern im Horizonte, halber Tagebogen, Morgenweite. 17
Welche Sterne nicht auf oder untergehn 19
Wo ein Stern durch die Mittagsfläche geht 20
Wie sich der parall. W. mit der Höhe ändert 21
Gebrauch hievon in der Wahl der Höhen 25
Aus einer Sonnenhöhe die Zeit zu finden, wobey die Veränderung der Abweichung in Betrachtung gezogen wird 34
Aus dem Stundenwinkel, die Höhe zu finden nach 9; I 41

Anwendungen davon 42
Wie groß die Halbmesser der Kreise werden die man bey Ziehung einer Mittagslinie durch den Gnomon braucht I
Länge des lothrechten Schattens, cylindrische Sonnenuhren u d. g. II
Gnomonische Quadranten IIII
Statt eines solchen Quadranten dienten gemeine Feldmesserwerkzeuge, mit einer Tafel der Sonnenhöhen VI
Nutzen dieses Verfahrens VIII
Aus den Rectascensionen der Sonne u. eines Sterns zu finden, wie lange nachmittage er durch die Mittagsfläche geht; Und wie weit er zu einer gegebenen Zeit von der Mittagsfläche absteht. 43
Gebrauch, des Abstandes der Nachtgleiche von der Sonne, in Zeit ausgedruckt 43; XVI;
Rectascension der Mitte des Himmels 43 XXI
Aus der Sonne und des Sterns Rectascensionen, und des letzten Höhe, die Zeit zu finden 44
Zusammengehörige Aenderungen, der Höhe u. des Zeitbogens 47
Warum man jezo einzelne Höhen zu Bestimmung der Zeit nicht braucht 48

Gebrauch der Uhren

Vermittelst eines Quadranten den Gang der Uhr mit Sternzeit zu vergleichen 51
Dieses ohne Quadranten zu bewerkstelligen 52
Und ohne Fernrohr 53
Uhrzeit in Sternzeit zu verwandeln 54
Diese Verwandlung für jede gegebene Zeit 57
Sternzeit in mittlerer auszudrucken 58
Aus Beobachtungen der Sterne, Uhrzeit in mittlere zu verwandeln. 66

Erinnerungen, wegen der Arten die Mittagslinie zu ziehen.

Wie es vermittelst eines Azimuthalquadranten geschähe 68
Gnomon 71
Beweglicher Gnomon 72

Gebrauch

Gebrauch des Gnomons wenn die Längen der Schatten selbst gebraucht werden. Diese Längen ohngefähr zum voraus zu wissen
Die Polhöhe ohngefähr zu wissen. 73
Wie man bey einem Quadranten, nur die Lagen der Schatten des Gnomons braucht 74
Prüfungen der Mittagslinie vermittelst der Uhr.
Uebereinstimmende Höhen 75
Fadendreyeck u. d g. 77
Fernrohr in der Mittagsfläche 78
Mauerquadrant 79
Vorzug des letzten vor dem ersten 81
Vermittelst Uhr und Quadranten, zu finden wieviel Rectascension u. Abweichung der Sonne sich zwischen zween nächsten Mittagen ändern 82
Drey Fehler eines Mauerquadranten 83. . . 85
Eine Höhe, durch Stundenwinkel u. Mittagshöhe ausgedruckt 90
Unterschied, der Mittagshöhe und einer Höhe nahe an der Mittagsfläche 91
Vergleichung zwischen Azimuth Stundenw. Abw. u Höhe 97
Einer gegebenen Verticalfläche Winkel mit der Mittagsfläche zu finden 98
Wieviel ein Stern in eine geneigte Ebene anders kömmt als in die Mittagsfläche 116
Was für ein Fehler in Zeit aus des Fernrohrs Neigung gegen die Mittagsfläche entsteht. 119
Was aus den drey Fehlern des Mauerquadranten für ein Fehler in Zeit entsteht 131
Wie diese drey Fehler durch drey Beobachtungen gefunden werden 138
Wieviel es Fehler in Zeit giebt, wenn eine Verticalfläche nicht genau in der Mittagsfläche ist 140
Vergleichung zwischen Polhöhe, Abweichung, Azimuth u Stundenwinkel 149
Zusammengehörige Aenderungen des Azimuth u. Stundenwinkels 151

Aus Polhöhe Abw. u. Az. den Zeitbogen zu finden 152
Die beyden Stellen zu finden, in denen ein Stern durch eine gegebene Verticalfläche geht 153
Gebrauch zur Berichtigung des Fernrohrs in der Mittagsfläche, wenn dessen Queraxe vollkommen wagrecht ist 180
Ein Fernrohr das sich um eine feste Queraxe dreht, beschreibt einen größten Kreis 184
Wie sich ein Fernrohr drehen müßte einen kleinen Kreis zu beschreiben 186
Eines größten Kreises, in dem man einen Stern zweymahl sehen kann, Lage gegen Meridian und Horizont zu finden 189
Wieviel ein Stern in einen solchen Kreis anders kömmt als in die Mittagsfläche 197
Auflösung der Aufgabe (189) wenn man die Zeit nicht weiß da der Stern durch die Mittagsfläche ging 203
Einer Verticalfläche Winkel mit der Mittagsfläche, aus zweener bekannten Sterne Durchgängen durch sie zu finden 206
Wenn man diesen Winkel weiß, zu finden wie lange ein bekannter Stern nach einem andern durch sie geht 217
Eines Fernrohrs verticaler Faden ist nicht genau in der Mittagsfläche; aus den Zeiten der Durchgänge zweener Sterne durch ihn, den Unterschied ihrer Rectascensionen zu finden 218
Wie sich Azimuth u Höhe mit einander ändern 234
Wie eines Sterns Azimuth abnehmen kann indem seine Höhe zunimmt u. umgekehrt. Und das größte Azimuth 238
Eine Methode die Refraction zu finden 244
Wie der Schatten eines lothrechten Stiftes rückwärts geht 245
Was von diesem Umstande allen Sternen gemein ist 252
Verbesserung des Mittags aus übereinstimmenden Höhen 253

Aus

Aus der eignen Bewegung der Sonne in kurzer Zeit, zu finden wieviel sich ihre Abweichung ändert 296
Diese Aenderung richtet sich nach der Länge, aber nicht nach der Abweichung 300
Wie eine allgemeine Tafel für die Mittagsverbesserung berechnet wird 303
Wo man dergleichen Tafeln findet? 311
Tafel für eine gegebene Polhöhe 313
Gebrauch der Tafeln 315
Wenn eine Zwischenzeit nicht in ihnen steht 316
Oder eine Länge 317
Größte Verbesserung 320
Erstreckung der Tafel auf mehr Stunden 321
Eine unrichtige Regel dafür 327
Eine Höhe nachmittages, die andere den folgenden Vormittag 339
Wie sich die Verbesserung bey geringen Aenderungen der Polhöhe ändert 345
Die Formel für die südliche Polhöhe zu brauchen 346
Für die heisse Zone 347
Für die kalte 348
Warum die Tafeln mit der Zeit unrichtig werden 349
Anwendung auf die Planeten 350
Formel durch den parallactischen Winkel 351
Wenn die V ohne Abweichung bestimmt wird 358
Beste Zeit zu übereinstimmenden Höhen 359
Schriftsteller von diesem Verfahren 360
Hr. Bernoullis Erinnerungen dagegen und sein Verfahren die Zeit zu bestimmen 361
Meine Gedanken vom Gebrauche des Fernrohrs in der Mittagsfläche, sowohl die Zeit des Mittags zu finden, als sich des Ganges der Uhr zu versichern 363
Wie man den Unterschied der Rectascensionen, der wahren und der erdichteten Sonne in Zeit verwandelt 364
Den Durchgang der Planeten durch die Mittagsfläche zu berechnen 398

Aus eines Planeten Durchgange durch einen Mittagskreis, seinen Durchgang durch einen andern zu berechnen 428
Stundenwinkel für eine geringe Höhe 444
Halber Tagebogen mit Betrachtung der Parallaxe und Refraction 445
Mit Betrachtung der Refraction allein 456
Ergänzung des Azimuth, für eine geringe Höhe 461
Verbesserung der Morgenweite, wegen Parallaxe u. Refr. 465
Gebrauch der Morgenweite die Abweichung des Compasses zu finden 466
Tafeln der Morgenweiten 467
Vom Positionswinkel 468
Veränderung der Rectascension u. Declination wegen des Vorrückens der Nachtgleichen 473
Veränderung des Positionwinkels 477
Ueber die beyden Theile der Veränderung der Rectascension 479
Anwendung der Formeln 480
Exempel, vom Regulus 483
Erinnerung wegen der hie vorkommenden bejahten und verneinten Grössen 487
Vorstellung des Vorrückens der Nachtgleichen im Zusammenhange, auf der Himmelskugel 488
In wieviel Jahren es einen Grad u. d. g. beträgt 497
Seine Wirkungen, beym Polarsterne 498
Bey α des grossen Bärs 499
Wie die Zahlen welche in Verzeichnissen die Stellen der Fixsterne angeben, für andere Zeiten zu ändern sind 500
Die Schiefe der Ekliptik ist nicht ganz unveränderlich 509
Neuere Beobachtungen derselben 513
Einige Mittel die Zeit der Nacht ohngefähr durch Sterne zu finden.
Durch zweene Sterne in einem Scheitelkreise 514
Aus der Sterne Durchgange durch die Mittagsfläche 523
Vermittelst einer Sonnenuhr; der Astrolabien, Münsters Sternuhren u. d. g. 524

Aus

Aus drey Sternen, deren zweene u. zweene in einerley Scheitelkreisen beobachtet werden, nebst der Zwischenzeit; die Zeit der Beobachtungen und die Polhöhe zu finden 526
Ueber das Dreyeck, das Ekliptik, Abweichungskreis und Aequator machen 528
Vergleichungen zwischen Abweichung, Länge, Rectascension, und Schiefe der Ekliptik 530
Zwischen diesen Dingen, und der Ekliptik Winkel mit dem Meridiane 531
Logarithmen für die jezige mittlere Schiefe der Ekliptik 534
Verhältnisse kleiner Aenderungen in diesem Dreyecke 535
Aenderungen die erfolgen wenn sich die Schiefe der Ekliptik ein wenig ändert 539
Reduction der Ekliptik auf den Aequator 542
Wenn Länge und wenn Rectascension grösser ist 546
Grösster Unterschied zwischen Rectascension u. Länge 549
Verbesserung der Reduction, wenn sich die Schiefe der Ekliptik ändert 550
Unterschied zwischen den Rectascensionen eines Punctes der Ekliptik, und eines Sterns der Breite hat 564
Für welche Länge er am grösten wird? 570
Daß solches beynahe im Kolur der Nachtgleichen geschiht 589
Berechnung eines andern Unterschiedes 593
Gebrauch davon bey den Planeten 598
Wieviel die Abweichung eines Sterns der Breite hat, von der Abweichung des Punctes der Ekliptik, der eben die Länge hat, unterschieden ist 600
Dieser Unterschied für eine geringe Breite 605
Um wieviel die Breite grösser ist, als dieser Unterschied? 606
Warum diese Formel, nicht sehr beynahe wahr seyn kann? 608
Einen kleinen Sinus der Tafeln, in Secunden auszudrucken, und ihn mit seinem Bogen zu vergleichen 610
Urtheil über die Brauchbarkeit der Näherung 614

Wo Tafeln zu den beyden letzten Untersuchungen zu finden sind? 616
Der Sonne Rectascension durch Beobachtungen zu finden 617
Durch Vergleichung mit einem Sterne 628
Dabey des Sterns Rectascension zu finden 644
Gebrauch zum Verzeichnisse der Sterne 651
Die Zeit der Sonnenwenden zu finden 652
Und der Nachtgleichen 655
Dauer des Durchganges der Sonne durch einen Scheitelkreis 669
Und durch einen horizontalen Kreis 692
Und des Auf und Untergangs 698
Aus der letztern die Polhöhe zu finden 701
Verbesserungen wegen der Refraction 702
Folgerungen wenn man einen Stern zweymahl in einem Kreise beobachtet hat der auf die Mittagsfläche senkrecht ist 703
Aus zwo Höhen eines Sterns u der Zwischenzeit, eine Vergleichung, zwischen diesen Dingen, Abweichung u Polhöhe 712
Aus zwo Höhen u dem Unterschiede ihrer Azimuthe, das Verhalten, zwischen diesen Dingen, Polh. u Abw 727
Verhalten zwischen zwey Azimutheu, ihren Stundenwinkeln, Polh. u Abw. 729
Zweene Sterne bekommen nach einander ein bekanntes Azimuth; man weiß jedes Abw. u Stundenwinkel, u. sucht die Polhöhe 731
Man weiß zweener bekannter Sterne Stundenwinkel, wenn man sie in gleichen Höhen sieht, und sucht daraus die Polhöhe 732
Wo man die Polhöhe weiß, sieht man zweene bekannte Sterne in gleichen Höhen; daraus die Zeit zu finden 733
Aus drey Höhen eines Sterns und den Zwischenzeiten seine Abweichung und die Polhöhe zu finden. 741

Aus

Aus zweener Sterne Durchgängen durch einerley Scheitelkreise u Almicantharate, Abweichungen u. Polhöhe zu finden 753
Eines unbekannten Sterns Abweichung u. Rectascension zu finden wenn man ihn mit einem bekannten durch eine Verticalfläche gehen sieht, beyder Höhen, und die Zwischenzeiten ihres Durchganges weiß 767
Ueber die Zeit die ein Stern braucht, eine gegebne Höhe zu erreichen 776
Wie sich diese Zeit mit der Abweichung ändert 778
Bey welcher Abweichung die Sonne eine gegebne Höhe in der kürzesten Zeit erreicht 783
Diese kürzeste Zeit selbst 800
Dauer der Dämmerung und kürzeste Dämmerung 805
Wo die kürzeste Dämmerung 12 Stunden und wo sie unmöglich wird 809
Unterschiedene Meynungen über die Gränze der Dämmerung 813
Das Ende der Dämmerung mit einer Weltkugel darzustellen 814
Sphärische Dreyecke auf einer Weltkugel vorzustellen 816
Adams Vorschlag sie durch Constructionen auf der Kugel aufzulösen 821
Wenn ein solches Verfahren mag brauchbar gewesen seyn 823
Den Aequator einer Weltkugel statt des Stundenzeigers zu brauchen 825
Ueber den aufgehenden Punct der Ekliptik, und ihren Winkel mit dem Horizonte 830
Der culminirende Punct der Ekliptik 833
Der Winkel des Aufgangs 837
Der Neunzigste 856
Desselben Höhe 858
Wenn er östlich oder westlich ist 859
Seine Länge 866; 879
Wie sich dieses in der heissen Zone verhält? 867

Auf und abſteigende Zeichen, in der allgemeinſten Bedeutung 878
Gebrauch des Neunzigſten 883
Schiefe Aſcenſion, u. Aſcenſionaldifferenz 884
Bilder der Sterndeuter, bey den aufgehenden Puncten der Ekliptik 885
Von der Zeit welche jedes himmliſche Zeichen braucht, auf oder unter zu gehen 889
Denen die unter dem Aequator wohnen, gehen entgegengeſetzte Zeichen der Ekliptik in gleichen Zeiten auf und unter 891
Eine hieher gehörige Stelle Lucans wieder Joſ. Scaliger vertheidigt 892
Wie man Lucans Verſe ordnen könnte 899
Entgegengeſetzte Zeichen 900

I. Abhand-

I. Abhandlung.

Trigonometrische u. a. analytische Formeln als Lehnsätze.

1) $\text{tang } \frac{1}{2} k = \frac{\text{Sin } k}{1 + \text{cos } k} = \frac{1 - \text{cos } k}{\text{Sin } k}$

Beyv. Aus Trig. 19. S. ist $1 + \text{cos } k = 2 \text{ cos } \frac{1}{2} k^2$ (das. 9 Zus.) Ferner $\text{sin } k = 2 . \text{sin } \frac{1}{2} k . \text{cos } \frac{1}{2} k$ welches beydes zusammen den ersten Ausdruck der Tangente giebt.

Wenn man in demselben, Zähler und Nenner mit $1 - \text{cos } k$ multiplicirt, so hat man den zweyten.

2) $\text{Cot } \frac{1}{2} k = \frac{\text{Sin } k}{1 - \text{cos } k} = \frac{1 + \text{cos } k}{\text{Sin } k}$

Der erste Ausdruck der Cotangente, folgt wenn man in (1) der Tangente zweyten umkehrt; der zweyte, wenn man des ersten Zähler und Nenner mit $1 + \cos k$ multiplicirt.

3) $\frac{2}{\sin k}$ oder $2 \operatorname{cosec} k = \operatorname{tang} \frac{1}{2} k + \cot \frac{1}{2} k$

Wenn man die zweyten Ausdrückungen, der Tangente und Cotangente in (1) u. (2) addirt.

4) $2 \cot k = \cot \frac{1}{2} k - \operatorname{tang} \frac{1}{2} k$

Wenn man die nur genannten zweyten Ausdrükkungen von einander abzieht.

5) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} k = \operatorname{cosec} k - \cot k$

aus 3; 4; abgezogen

6) $\cot \frac{1}{2} k = \operatorname{cosec} k + \cot k$

aus 3; 4; addirt.

7. Wenn man $\frac{1}{2} k = \mu$ setzt, so bekommen die bisherigen Sätze Ausdrückungen, unter denen sie auch oft erscheinen. Es ist genug solches hier anzuzeigen und nur durch ein Exempel zu erläutern.

Aus (3) ist

$$\operatorname{tang} \mu + \cot \mu = \frac{2}{\sin 2\mu}$$

und aus (4)

$$\cot \mu - \operatorname{tang} \mu = 2 \cot 2\mu$$

Aus

Zusammensetzungen zweener Winkel.

8) $\text{Sin}(\lambda+\varepsilon)+\text{sin}(\lambda-\varepsilon)=2.\text{sin}\,\lambda.\text{col}\,\varepsilon$

9) $\text{sin}(\lambda+\varepsilon)-\text{sin}(\lambda-\varepsilon)=2.\text{col}\,\lambda.\text{sin}\,\varepsilon$

Aus Trig. 19. S.

10) $\text{col}(\lambda-\varepsilon)+\text{col}(\lambda+\varepsilon)=2.\text{col}\,\lambda.\text{col}\,\varepsilon$

11) $\text{col}(\lambda-\varepsilon)-\text{col}(\lambda+\varepsilon)=2\,\text{sin}\,\lambda.\text{sin}\,\varepsilon$

daſ. 1; 2; Zuſ.

13) $\dfrac{\text{Sin}(\lambda+\varepsilon)+\text{sin}(\lambda-\varepsilon)}{\text{col}(\lambda-\varepsilon)+\text{col}(\lambda+\varepsilon)}=\text{tang}\,\lambda$

Wenn man (8) mit (10) dividirt.

14) $\dfrac{\text{Sin}(\lambda+\varepsilon)-\text{sin}(\lambda-\varepsilon)}{\text{col}(\lambda-\varepsilon)-\text{col}(\lambda+\varepsilon)}=\text{cot}\,\lambda$

Wenn man (9) mit (11) dividirt.

15) Wenn man die Brüche 13; 14; umkehrt daß die Cosinus in die Zähler kommen, die Sinus in die Nenner, so giebt der verkehrte von (13) cot λ; der verkehrte von (14) tang λ;

16) Man erhält eben so tang ε; und cot ε; wenn man (9) mit (10) und (8) mit (11) dividirt.

17) Die Werthe der Tangenten in (13) (16) haben einerley Nenner; und eben so die Werthe der Cotangenten. Also ist

18) $\dfrac{\text{Sin}(\lambda+\varepsilon)+\text{sin}(\lambda-\varepsilon)}{\text{Sin}(\lambda+\varepsilon)-\text{sin}(\lambda-\varepsilon)}=\dfrac{\text{tang}\,\lambda}{\text{tang}\,\varepsilon}$

welches sich auch so gleich einsehen liesse, wenn man (8) mit (9) dividirte.

19. $\frac{\text{col}(\lambda - \varepsilon) + \text{col}(\lambda + \varepsilon)}{\text{col}(\lambda - \varepsilon) - \text{col}(\lambda + \varepsilon)} = \cot\lambda . \cot\varepsilon$

wenn man (10) mit (11) dividirt.

20. Der Bruch (19) umgekehrt giebt das Product beyder Tangenten.

21 In den Formeln von 8 bis 19; sahe man die Sinusse u. Cosinusse, von Summen u. Unterschieden, als gegeben an, und fand aus ihnen Tangenten und Cotangenten der einzelnen Winkel.

Folgendergestalt erhält man Ausdrückungen wo Tangenten u. Cotangenten von Summen und Unterschieden aus der einzelnen Winkel Sinussen u. Cosinussen gefunden werden.

22. Es sey $\lambda = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
also $\lambda + \varepsilon = \alpha$; $\lambda - \varepsilon = \beta$

23) $\frac{\text{Sin}\,\alpha \pm \text{sin}\,\beta}{\text{col}\,\beta + \text{col}\,\alpha} = \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$

nähmlich die obern Zeichen für die Summe, die untern für den Unterschied. Aus (13) (16)

24) $\frac{\text{Sin}\,\alpha \mp \text{sin}\,\beta}{\text{col}\,\beta - \text{col}\,\alpha} = \cot\,\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$

Aus 14; 16;

25) Die Werthe der beyden Tangenten in (23) haben einerley Nenner; wenn man also die Zähler mit einander dividirt, so kömmt

26) $\frac{\text{Sin}\,\alpha + \text{sin}\,\beta}{\text{sin}\,\alpha - \text{sin}\,\beta} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$

Eine

Eine bekannte Regel die man für sich allein in der gemeinen Trigonometrie braucht, und da weitläuftig beweisen muß. Trig. 14 S. Die Seiten des Dreyecks verhalten sich nähmlich wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel.

27) $\text{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\text{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta}$

aus (23) die Werthe der beyden Tangenten einzeln ausgedruckt

28) $\text{tang}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\text{tang}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{2\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$

Eben so

29) $\cos\beta+\cos\alpha=2.\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

Aus 10; 22;

30) $\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta).\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

Aus 11.

31) Man setze $\alpha=90°-\gamma$; $\beta=90°-\delta$

So ist

32) $\sin\delta+\sin\gamma=2.\sin\frac{1}{2}(\gamma+\delta).\cos\frac{1}{2}(\delta-\gamma)$

aus (29)

33) $\sin\delta-\sin\gamma=2.\cos\frac{1}{2}(\gamma+\delta).\sin\frac{1}{2}(\delta-\gamma)$

aus (30)

34) $\text{tang}\zeta\pm\text{tang}\theta=\frac{\sin(\zeta\pm\theta)}{\cos\zeta\cos\theta}$ deren

$\text{tang}\zeta=\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta}$; die andere Tangente eben so ausge-

druckt, und die Summe oder Differenz genommen findet sich dieses.

$$35)\quad \cot\theta \pm \cot\zeta = \frac{\sin(\zeta \pm \theta)}{\sin\zeta.\sin\theta}$$

erhellt eben so wenn man die Cotangente ausdruckt.

$$36)\quad \frac{\text{tang}\,\zeta + \text{tang}\,\theta}{\text{tang}\,\zeta - \text{tang}\,\theta} = \frac{\sin(\zeta+\theta)}{\sin(\zeta-\theta)}$$

aus (34)

$$37)\quad 1 \pm \text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\beta = \frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

Erhellt wenn man jede Tangente durch Sinus und Cosinus ausdruckt, dieser Ausdrücke Product zu 1 addirt und ferner nach Trig. 19. S. 1; 2; Zus. verfährt.

$$38)\quad \frac{1 + \text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,\beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

aus (37)

$$39)\quad \text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,(\alpha-\beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha.\cos(\alpha-\beta)}$$

denn der Unterschied beyder Tangenten ist

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

welche Brüche auf einerley Benennung gebracht und der letzte vom ersten abgezogen, einen Bruch geben dessen Zähler $\sin\beta$ ist (Trig. 19. S.)

$$40)\quad \text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,(\alpha-\beta) = \frac{\sin(2\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos(\alpha-\beta)}$$

Erhellt eben so.

41. Aufgabe Zweene Winkel α, β, haben eine gegebene Summe $= 180° - \gamma$;
Ihre Sinus haben eine gegebene Verhältniß a : b
Man soll die Winkel finden.

42) Aufl. Weil der Winkel halbe Summe $90° - \frac{1}{2}\gamma$ ist, so ist

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cot\tfrac{1}{2}\gamma \qquad (1+s)$$

43 Also hat man aus (26)

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\cot\frac{1}{2}\gamma \cdot (a-b)}{a+b}$$

44) Die gewöhnliche Auflösung für Trig. 14 S. Nähmlich a, b, sind die Seiten des Dreyecks, die den Winkeln welche mit den ähnlichen griechischen Buchstaben bezeichnet sind gegen über stehen.

45) Wenn man bey dieser Auflösung die gemeinen Tafeln braucht so findet man der Winkel halben Unterschied nur innerhalb einer Minute, also den ganzen innerhalb 2 Minuten.

46) Also wird es nicht überflüßig seyn Formeln zu suchen, die jeden Winkel unmittelbar geben, ohne daß man ihn erst aus halber Summe u. Differenz berechnen darf.

47) Die Summe der Tangenten 42; 43; ist

$$\frac{2a \cdot \cot\frac{1}{2}\gamma}{a+b}$$

48) Ihr Product von 1 abgezogen giebt

$$\frac{a+b-(a-b)\cdot\cot\frac{1}{2}\gamma^2}{a+b}$$

49) Also ist

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{2a.\cot\frac{1}{2}\gamma}{a+b-(a-b).\cot\frac{1}{2}\gamma}$$

(Trig. 19. S. 3. Zus.)

50) Dieser Ausdruck giebt

$$\frac{2a}{(a+b).\text{tang}\frac{1}{2}\gamma-(a-b)\cot\frac{1}{2}\gamma}$$

51. Da wird der Nenner

$$a.(\text{tang}\frac{1}{2}\gamma-\cot\frac{1}{2}\gamma) + b.(\text{tang}\frac{1}{2}\gamma+\cot\frac{1}{2}\gamma)$$

Dieß aber ist (2; 3)

$$-2a.\cot\gamma+\frac{2b}{\sin\gamma}$$

$$=2.\frac{(b-a.\cos\gamma)}{\sin\gamma}$$

52. Also wird aus (50)

$$\text{tang}\,\alpha=\frac{a.\sin\gamma}{b-a.\cos\gamma}$$

53. Und $\text{tang}\,\beta=\frac{b.\sin\gamma}{a-b.\cos\gamma}$

Denn man darf nur zugleich β mit α und b mit a verwechseln

Oder wer sich im Rechnen üben will, sucht die Tangente der halben Summe weniger des halben Unterschiedes

54. Von den beyden gesuchten Winkeln ist der in (53) der gröste, und ihm gegenüber steht die gröste

gröste Seite. Man drucke also diese Formel folgendergestalt aus

55) $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\gamma}{\frac{b}{a} - \cos\gamma}$

Sinus und Cosinus werden unten gefunden (66)

56 Jeder Theil des Nenners ist da ein eigentlicher Bruch. Den ersten kann man durch die Logarithmen sehr genau finden, den andern nimmt man aus den Tafeln, und der Logarithme von beyder Unterschiede läßt sich also auch ziemlich genau finden, daß man also den einen gesuchten Winkel durch diese Formel zugleich bequemer und auch genauer findet als durch die gewöhnliche Rechnung. Der andere wird wie bekannt leicht aus dem ersten gefunden. Auch wäre für ihn folgende Formel bequem

57) $\text{tang}\,\beta = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin\gamma}{1 - \frac{b}{a} \cos\gamma}$

58) Exempel

$\gamma = 63^\circ\ 36^1$; $a = 2115$; $b = 1738$

$\log b = 4,2400498 - 1$

$\log a = 3,3253104$

$0,9147394 - 1$

giebt $\frac{b}{a} = 0,82175 -$

$\cos\gamma = 0,4446352$

der Nenner (55) $= 0,3771148$

Seiner ersten fünf Zifern

Logarithme = 4,5764680 — 5

abgezogen von log sin γ = 9,9521683

log tang α = 10,3757003

giebt α = 67° 10′ +

eben wie er Trig. 15 S. gefunden worden.

59) Erläuterung Wenn man eines eigentlichen Bruches Logarithmen sucht, so kann man das Verneinte das herauskommen muß, der Gestalt nach auf die Art vermeiden wie ich hie gethan habe, daß man des kleinern Logarithmen Kennzifer um so viel vermehrt als nöthig ist damit sich der grössere abziehen läßt, zugleich aber, andeutet daß diese Vermehrung abgezogen werden soll.

60) Dieses dient erstlich den eigentlichen Bruch sogleich in Decimaltheilen zu finden.

Man sucht nähmlich seinen bejahten Theil unter der größten Kennzifer auf, welche sich in den Tafeln b findet, das giebt die Zahl welcher dieser bejahte Theil für sich zugehören würde.

Im Exempel 3,7711

Was aber die Zifer dieser Zahl, die sich in der Stelle der schlechten Einheiten befindet für eine Stelle im Bruche bekömmt, das zeigt die gemachte Vermehrung, die man wieder abzieht.

61) Wenn man eines Bruchs Logarithmen nach (59) durch einen bejahten und verneinten Theil ausgedruckt hat, so ist auch die fernere Rechnung mit die-

diesen Logarithmen, bequemer als wenn man den Ausdruck völlig verneint gemacht hätte.

62) Soll man den Logarithmen abziehen, so zieht man den bejahten Theil ab, und addirt den verneinten

Wie in dem Exempel (58)

63) Soll man ihn zu einem andern Logarithmen addiren, so darf man nur am Ende der Addition, von der Kennzifer welche die Summe bekäme, wenn der verneinte Theil nicht da wäre, diesen verneinten Theil abziehn.

64) Nach der Formel (55) müßte man eigentlich den Logarithmen des Sinus von γ der in den Tafeln steht um 10 vermindern (Trig. 20 S.) So bekäme man den Logarithmen der Tangente von α für den Halbmesser $= 1$; will man also den Logarithmen dieser Tangente haben, wie er in den Tafeln steht so müßte man wieder 10 addiren, und daher ist der Abzug der 10 unterwegens gelassen worden.

65) Aus (55) findet sich $\sec \alpha$; Es ist ein Bruch der eben den dortigen Nenner hat, der Zähler ist $\sqrt{((\frac{b}{a})^2 - \frac{2b}{a} \cdot \cos \gamma + 1)}$ dafür ich k schreiben will. Will man diese Grösse berechnen, so bekömmt man aus Trig. 4. Erkl. 5 u. 3; Zus.

66) $\cos\alpha = \frac{\frac{b}{a} - \cos\gamma}{t}$

$\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{f}$

67) Eben so ist

$\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{\frac{a}{b}\, f}$

$= \frac{\sin\gamma}{g}$

$\cos\beta = \frac{\frac{a}{b} - \cos\gamma}{g}$

wo $g = \sqrt{\left(\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{2a}{b}, \cos\gamma + 1\right)}$

Dieß erhellt aus der Verwechselung (53) und wird auch aus 66 durch den ersten trigonometrischen Satz (Trig. 10) gefunden.

68) Wenn γ spitzig ist, ist allemahl $ff < 2$; bey einem stumpfen Winkel kann diese Grösse, mehr als 2 betragen, und wächst bis 4; für $b = a$; $\gamma = 180°$; Also ist 2 der größte Werth dem f sich nähert wenn in einem gleichschenklichten Dreyecke, der Winkel zwischen den gleichen Schenkeln bis an $180°$ wächst.

Aus einer Gleichung die eines Winkels Sinus und Cosinus enthält den Winkel zu finden.

69) Es sey $\sin x = f. \cos x + g$ wo f; g; gegebene Grössen sind.

70 Wenn man $\sin x$ durch $\cos x$ ausdruckt und die herauskommende quadratische Gleichung auflöset, so erhält man

$$\cos x = \frac{-f.g \pm \sqrt{(ffgg + (1+ff).(1-gg))}}{1+ff}$$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist $1+ff-gg$

71) Druckt man $\cos x$ in 69 durch $\sin x$ aus, so findet man eben auf diese Art

$$\sin x = \frac{g \pm f\sqrt{(1+ff-gg)}}{1+ff}$$

72) Man hat auch

$$\sin x = \frac{\frac{g}{1+ff} \pm f.\sqrt{(1-\frac{gg}{1+ff})}}{\sqrt{(1+ff)}}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{(1-\frac{\frac{gg}{1+ff}}{\sqrt{(1+ff)}})} - \frac{\frac{fg}{1+ff}}{\sqrt{(1+ff)}}$$

73. Man sieht sogleich daß sich die Wurzelgrösse im Dividendus auf einen Cosinus, die im Divisor auf eine Secante bringen läßt. Man setze also

$\frac{g}{\sqrt{(1+ff)}} = \sin p$; $f = \tang q$; also die Wurzelgrösse

gröſſe im Dividendus = cos p; die im Diviſor = sec q = $\frac{1}{\cos q}$; So iſt

74) $\sin x = \sin p . \cos q \pm \sin q . \cos p$
$\cos x = \pm \cos p . \cos q - \sin p . \sin q$

75) Braucht man zuerſt die obern Zeichen, darnach die untern, ſo hat man
$\sin x = \sin (p + q)$ oder $= \sin (p - q)$
$\cos x = \cos (p + q)$ oder $= - \cos (p - q)$
Dieſes beſtimmt alſo die beyden Werthe von x folgendergeſtalt

76) $x = p + q$ oder
$= 180° - (p - q)$

77) Da iſt nähmlich aus (73)
$q =$ Bog tang f;
$p =$ Bog sin $\frac{g}{\sqrt{(1 + ff)}}$
$=$ Bog sin (g. cos q)

78) Exempel Es ſey $g = 0$; alſo $p = 0$; ſo ſind aus 76; 77; die beyden Werthe
$x =$ B tang f oder
$= 180° +$ Bog tang f

In dieſem Falle wäre aus (68) $\frac{\sin x}{\cos x} = f$ alſo der erſte Werth des geſuchten Winkels offenbahr:

Es wäre aber auch $\frac{-\sin x}{-\cos x} = f$

und wenn + sin x zum Bog tang f gehört, so gehören, dieser Sinus verneint genommen, und sein Cosinus verneint genommen, zu 180° + B tang f

79) Wenn die Aufgabe möglich seyn soll, so muß nicht nur jede Wurzelgrösse möglich seyn, sondern, der Werth des Sinus muß auch was geringers als 1 betragen.

Der erste Umstand erfodert $1 + ff > gg$
Und wenn dieses ist so ist auch p möglich (73) aber q ist allemahl möglich, wenn f möglich ist, was auch sonst f für eine Grösse hat
Also ist x das durch p und q gegeben ist möglich.
Solchergestalt findet sich der zweyte Umstand allemahl wenn der erste vorhanden ist.

80) Diese Formeln werden also auch dienen, wenn ein Winkel durch zwo ihm zugehörige Linien bestimmt, unter anderer Gestalt in einer Gleichung vorkömmt. Als

81) $\text{tang } x = f + \frac{g}{\cos x} = f + g \cdot \sec x$

82) $1 = f \cdot \cot x + \frac{g}{\sin x}$

Formeln für kleine Aenderungen der Winkel.

83. Wenn sich ein Winkel nur wenig ändert, also auch Sinus, Tangente ꝛc. von ihm nur wenig, so sieht man diese zusammen gehörigen Aenderungen des Winkels und der trigonometrischen Linien, als

Dif-

Differentiale an, und braucht die dahin gehörigen Formeln aus der Analysis des Unendlichen.

Diese Formeln bestimmen eigentlich das Verhalten verschwindender Veränderungen, also läßt sich das Verhalten kleiner Aenderungen nach denselben beynahe beurtheilen.

84. Ihre Anwendung wird alsdenn unsicher, wenn die Voraussetzungen nicht statt finden aus denen sie sind hergeleitet worden, wenn z. E. die Veränderung eines Winkels, bey einem sehr kleinen Winkel vorkäme, gegen welchen sie selbst beträchtlich wäre, nicht unbeträchtlich wie die Differentialformel voraussetzt.

In solchen Fällen aber, kann man auch selbst in der Analysis des Unendlichen die sonst daselbst gewöhnlichen Formeln nicht sicher brauchen. (An. Un. 16.)

85) Wenn in einem Ausdrucke trigonometrische Linien die zu einem und demselben Winkel gehören vorkommen, so hat jede dieser Linien ihr eigen Differential, die Tangente ein anders als der Sinus u. s. w.

Man übersieht also das Verhalten dieser Differentiale in endlichen Grössen am besten, wenn man sie alle durch das gemeinschaftliche Differential des Winkels ausdruckt.

86) Dahin gehören folgende Gleichungen wo w einen Winkel bedeutet.

87) $d \sin w = \cos w . dw$ (An. Un. 281)

88) $d \cos w = -\sin w . dw$ (das. 296)

89)

89) $d\,\text{tang}\,w = \text{sec}\,w^2 . dw$ (daſ. 299)

$$= \frac{dw}{\text{cos}\,w^2}$$

90) $d\,\text{cot}\,w = -\text{cosec}\,w^2\,dw$

$$= \frac{-dw}{\text{sin}\,w^2}$$

91) $d\,\text{sec}\,w = \text{tang}\,w . \text{sec}\,w . dw$

92) Die beyden letzten Sätze findet man leicht durch Differentiren.

Weil $\text{cot}\,w = \frac{1}{\text{tang}\,w}$, ſo iſt das Differential davon $= \frac{-d\,\text{tang}\,w}{\text{tang}\,w^2}$, wo man ſtatt des Differentials der Tangente, ſeinen Werth aus (79) ſetzt:

Weil $\text{sec}\,w = \sqrt{(1 + \text{tang}\,w^2)}$ ſo iſt das Differential davon $= \frac{\text{tang}\,w . d\,\text{tang}\,w}{\text{sec}\,w}$, wo man wiederum ſtatt des Differentials der Tangente ſeinen Werth ſetzt.

93. Aus dieſen Gleichungen findet ſich leicht durch die gehörige Diviſion, die Veränderung des Bogens durch die Aenderung ſeines Sinus u. d. g.

94. Beyderley Aenderungen, finden ſich in Decimaltheilen des Halbmeſſers. Die kleinern Aenderungen des Bogens aber verlangt man gewöhnlich in Secunden zu wiſſen; wenn ſie auch etliche Minuten austragen ſo ſind doch dieſe Minuten durch

die leichte Division mit 60 gar bald gefunden. Hiezu dient folgendes.

95. Die Länge des Bogens einer Secunde in Decimaltheilen des Halbmessers heisse

$e = 0,0000048481 36...$ (An. Un. 309)

96. Aus An. Un. 343; ist zu ersehen, wie folgende Logarithmen berechnet werden.

$\log 180^\circ = 0,49714987$

$\log 1^\circ = -1,758122632$

$\log 1' = -3,536273882 79$

$\log 1'' = -5,314425133 = \log e$

$\log \frac{1}{2} e = -5,6154551$

$\log \frac{1}{4} e = -5,9164851$

97. Diese Logarithmen stehen noch viel weiter berechnet, in Eulers Introd. in Anal. infin. L. I. §. 190 u. Lib. II. §. 529.

98. Auch ist

$\log e = 4,68557486682. . . . - 10$

Wie man findet, wenn man den verneinten Logarithmen der Länge einer Secunde, zu 10 addirt. Euler a.a.O.

Aus log e in (96) folgt daß e zwischen $\frac{1}{206260}$ und $\frac{1}{206270}$ fällt.

99. Der Gebrauch hievon ist folgender: Man hat einen Bogen in Secunden gegeben, und will wissen wieviel er Decimaltheile des Halbmessers beträgt.

Da verfährt man auf eine folgender beyden Arten.

I. Zum

I. Zum Logarithmen der gegebenen Zahl von Secunden addire man log e; das ist man ziehe 5, 314. . . ab

II. Oder man addire dazu 4, 68. . (98) und ziehe 10 von der Summe ab.

Jedes Verfahren giebt den Logarithmen der gesuchten Menge von Decimaltheilen.

100 Umgekehrt, wenn man den Logarithmen der Menge von Decimaltheilen hätte, die auf einen Bogen gehn so fände sich der Logarithme der Menge von Secunden die er enthält folgendergestalt:

I. Man ziehe von dem gegebnen Logarithmen log e ab; das ist man addire 5, 314. . .

II. Oder, man addire zu ihm 10; und ziehe von der Summe 4, 68. . ab.

101 Es ist leicht zu sehn, wie man sich auf ähnliche Art verhält, wenn statt der Secunden Minuten oder Grade vorkommen.

102. Die Proportion $P : 1 = 180 : \frac{180}{P}$;

zeigt im vierten Gliede, wieviel Grade der Bogen hält der so lang ist als der Halbmesser.

Man kann dieses also aus Geom. 44 S. 5. Zus. berechnen; und wenn man die so gefundene Zahl mit 60; und mit 60. 60 multiplicirt, so bekömmt man diesen Bogen in Minuten, und in Secunden.

Euler a. a. O. §. 530 giebt ihn folgendergestalt an, viel weiter als ich die Ziefern hersetze.

57 , 295779513
3437', 7467707849
206264'', 806247

In Graden, Minuten, Secunden u. s. w. ist er

57°; 17'; 44''; 48'''; . . . .

Einige Schriftsteller, z. E. Hr. de la Lande bedienen sich dieses Bogens, bey solchen Fragen wie 89; 90; wenn ein Bogen in Decimaltheilen des Halbmessers gegeben ist, und in Theilen des Kreises verlangt wird u. umgekehrt.

103) Die Länge eines Bogens sey = a; so hält er in Graden $\frac{180.a}{P}$ das ist

$\frac{a}{180}$. 57, 295. . . u. s. w.

104. Der vorhin gelehrte Gebrauch der Logarithmen ist ohnstreitig bequemer, ich habe dieses daher nur beygebracht damit man das Verfahren dieser Schriftsteller versteht.

Wie man die Veränderungen der Winkel in Secunden ausdruckt.

105. In den Gleichungen 87. . . 91, setze man n, e statt dw; wo n die Menge Secunden bedeutet, die auf diesen Bogen gehn, so kann man nachdem es die Frage erfodert, diese Menge als gegeben ansehn und daraus die ihr zugehörige Aenderung der trigonometrischen Linie berechnen oder, wenn die Aenderung der Linie gegeben ist berechnet man daraus die Menge der Secunden die ihr zugehöret.

106 **Exempel** Wieviel wächst der Sinus von $28^\circ\ 21^\prime$, wenn sein Winkel um $36^{\prime\prime\prime}$ wächst?

Dieß gehört zu $\frac{8}{7}$; $w = 28^\circ\ 21^\prime$; $n = 36$

$\log \cos w = 9,9445139 - 10$

$\log n = 1,5563025$

$\log e = 4,6855748 - 10$

Summe $= 0,1863912 - 4$

gehört zu $0,00015360$

So viel also müßte zu $\sin 28^\circ\ 21^\prime$ addirt werden um $\sin 28^\circ\ 21^\prime\ 36^{\prime\prime\prime}$ zu bekommen.

In Gellibrands Tafeln, wo beyde Sinus stehen ist das Wachsthum

$0,00015359 \ldots$

Weil meine Absicht hier nur ist den Gebrauch der Formeln zu erläutern, so geht es mich nichts an, ob man bey einem solchen Exempel, lieber die gewöhnlichen Proportionaltheile brauchen wollte.

107. Der Gebrauch dieser Proportionaltheile beruht übrigens mit vorigen Formeln auf einerley Grunde.

Sucht man sie aus den gemeinen Tafeln so nimmt man eine Minute, für einen unmerklich kleinen Bogen an, und kömmt also der Wahrheit noch nicht so sehr nahe als hier wo man statt dw noch kleinere Bogen brauchen kann.

Differentialformeln für geradlinichte Dreyecke.

108 Wenn man von den Seiten und Winkeln eines Dreyecks zwey ungeändert behält z. E. eine Seite u. einen Winkel; oder zwo Seiten, u. s. w.

das übrige aber sich ändern läßt, so haben die Aenderungen allemahl ein gewisses Verhalten gegen einander das sich durch die Analysis bestimmen läßt.

109. Umständlich hat dieses Roger Cotesius untersucht in einer Schrift: Aestimatio errorum in mixta matheſi per variationes partium Trianguli plani et Sphaerici; sie befindet sich unter andern kleinern mathematischen Werken bey seiner Harmonia mensurarum, die Rob. Smith zu Cambridge 1722. 4 herausgegeben hat.

Auch sind auf Kosten des Hrn. Grafen Ferdinand v. der Lippe, (*) durch Hr. Prof. Matsko Opera Miscella Rog. Cotes zu Lemgo 1768 herausgekommen, wo sich dieser Aufsatz ebenfalls befindet.

Cotes beweist alles synthetisch, aus Betrachtung der Figuren. In der Folge zeige ich wie seine Sätze analytisch gefunden werden, und am Ende werde ich eine Tafel beyfügen welche weiset daß in ihnen alle Fälle die vorkommen können enthalten sind.

f. 110 ABC (1 Fig.) ist ein geradelinichtes Dreyeck; die

(*) Dieser Herr ist d. 23. Apr. 1772 im 27 Jahre seines Alters als kön. portugiesischer und gräfl. Bückeburgischer Obristlieutenant gestorben. Da Er so frühzeitig thätige Neigung gezeigt hatte die Wissenschaften zu befördern, so hätte man sich destomehr deßwegen von Ihm zu versprechen gehabt, je eifriger Er auch hierinn sich nach dem Beyspiele des Durchl. regierenden Grafen zu Schaumburg zu bilden suchte.

die Seiten werden durch die kleinern Buchstaben der Winkel denen sie gegen über stehen angedeutet.

111. Es bleiben ungeändert eine Seite c; und ihr anliegender Winkel B.

112 Man sucht wie sich die Veränderungen der beyden andern Seiten verhalten.

113 Denn von den Winkeln ist offenbahr daß der eine soviel wächst als der andre abnimmt.

114 Aus Trig. 20 S. ist

$$2c.\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a}$$

wo auf der linken Seite alles unveränderlich ist. Man differentiire also auf der rechten Seite, und setze das Differential $= 0$. Zu dieser Absicht braucht man nur des Differentials Zähler zu suchen u. solchen $= 0$ zu setzen, weil der Nenner $= a^2$ ist. Das giebt also

$$0 = a.(2\,ada - 2\,bdb) - (a^2 + c^2 - b^2)\,da$$

Wenn man dieses so ordnet, daß zusammenkömmt was ein Differential enthält, so ist

$$2\,abdb = (a^2 + b^2 - c^2)\,da$$

Hiermit vergleiche man den Werth von cos C aus Trig. 20 S. so hat man

115 $db = \cos C.\,da$

116. Auch in (111) sucht man wie sich die Veränderungen des Winkels A, und der anliegenden Seite b, verhalten.

117. Weil c. sin B = b. sin C wo linker Hand

 nichts

nichts Veränderliches ist so differentiire man rechter Hand und drucke des Sinus Differential nach (117) aus. Das giebt

$0 = b.\cos C.\, dC + \sin C.\, db$

also, weil $dC = -dA$ (113)

118) $db = b.\cot C.\, dA$

119) Auch in (111) sucht man die Veränderung eben des Winkels und der ihm gegenüberstehenden Seite

120) Aus (115) (118) wird

$$da = \frac{b.\, dA}{\sin C}$$

121. Nun solle eine Seite a; und der ihr gegenüberstehende Winkel ungeändert bleiben.

Die beyden andern Winkel ändern sich wie in 113

122) Veränderungen eines dieser Winkel und einer Seite, dC; dc

123) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$; Nur was rechter Hand steht ist veränderlich. Des Differentials Zähler ist also

$c.\cos C.\, dC - \sin C.\, dc = 0$

124) Daher $dC = \frac{\tang C}{c}\, dc$

125) Wegen (121) giebt was rechter Hand steht auch $= dB$

126) Noch in (121) die Veränderungen der beyden anden Seiten.

Nach

Nach (124) ist auch $dB = \frac{\text{tang } B}{b} . db$

also nach (125)

$\frac{\text{tang } B . db}{b} = \frac{-\text{tang } C}{c} . dc$

oder $db = -\text{tang } C . \cot B . \frac{b}{c} \; dc$

$= \frac{-\text{sin } C}{\text{cos } C} \cdot \frac{\text{cos } B}{\text{sin } B} \cdot \frac{\text{sin } B}{\text{sin } C} \; dc$

$= \frac{-\text{cos } B}{\text{cos } C} . dc$

127. Also $db = \frac{-\text{cos } B}{\text{cos } C} . dc$

128. Die beyden Seiten, b, c, sollen unveränderlich bleiben.

129 Veränderuugen der beyden Winkel die den unveränderlichen Seiten gegenüberstehen.

Weil $c . \text{sin } B = b . \text{sin } C$, so ist

$c . \text{cos } B . dB = b . \text{cos } C . dC$

Dividirt man das linke Glied der Differentialgleichung mit dem linken der Gleichung von der sie hergeleitet war, und auch so die rechten Glieder, so ist

130 I $\cot B . dB = \cot C . dC$

II Oder $\text{tang } C . dB = \text{tang } B . dC$

131) In 128; Veränderungen des eingeschlossenen Winkels, und eines andern

Weil $A = 180° - B - C$ so ist

$dA = -dB - dC$

=

$$= -\frac{(\text{tang } B + \text{tang } C)}{\text{tang } B} \cdot d\,B \quad (130; II).$$

Aber $\text{tang } C + \text{tang } B = \frac{\text{sin } (C+B)}{\text{cos } C . \text{cos } B}$ (34).

Also

132) I) $dA = \frac{-\text{sin } A . dB}{\text{cos } C . \text{sin } B}$ oder

II) $dA = \frac{-a . dB}{b . \text{cos } C}$

133) In 129; Veränderungen des eingeschlossenen Winkels, und der ihm gegen überstehenden Seite.

Weil $\text{cos } A = \frac{b^2 + c^2}{2bc} - \frac{a^2}{2bc}$

oder $dA = \frac{a . da}{bc \text{ sin } A}$

So ist (78) $-\text{sin } A . dA = -\frac{a\,da}{bc}$

Und statt a: b die Verhältniß der Sinusse gesetzt

134 I) $dA = \frac{da}{c . \text{sin } B}$; Oder

II) $dA = \frac{\text{cosec } B . da}{c}$

135) In 129; Veränderungen eines nicht eingeschlossenen Winkels, und der veränderlichen Seite

Aus 134; 132; ist

$\frac{da}{c . \text{sin } B} = \frac{-a . dB}{b . \text{cos } C}$ also

da

$$da = \frac{-c.\sin B.\sin A.dB}{\sin B.\cos C} \quad \text{oder}$$

136) $$da = -\frac{c.\sin A}{\cos C}.\ dB$$

137) Auch $da = -a.\tang C.dB$

Weil $c.\sin A = a.\sin C$

138. Wenn zweene Winkel ungeändert bleiben, so bleibt auch der dritte ungeändert, und die Seiten können sich nur so ändern daß das Dreyeck sich immer ähnlich bleibt. Also verhalten sich hier die Aenderungen der Seiten, wie die Seiten selbst oder es ist $da : db = a : b$

139. Ob die Veränderung die man berechnet **Wachsthum** oder **Abnehmen** ist, entscheidet sich leicht daraus ob sie bejaht oder verneint ist (An. Un. 23) dabey man sich erinnern muß wenn Cosinusse, Tangenten, u. d. g. verneint werden (Trig. 3. Erkl. 3. Zus. 4. Erk. 2. Zus.) Weil hie keine andern Winkel oder Bogen vorkommen als bis 180°, so sind alle Sinusse bejaht.

140. Daraus liessen sich selbst Lehrsätze herleiten, wenn es der Mühe werth wäre, solche nach Art der Alten mit Worten weitläuftig auszudrucken.

141) Nur eine Probe wie (137) heissen würde.

In einem Dreyecke bleiben zwo Seiten ungeändert. Wenn von den beyden Winkeln die diesen beyden Seiten gegenüber stehn, einer spitzig ist und der andre wächst, so nimmt die dritte Seite ab.

Ist

Ist aber einer stumpf und der andre wächst, so wächst die dritte Seite.

Ist einer spitzig und der andre nimmt ab, so wächst die dritte Seite.

Ist einer stumpf und der andre nimmt zu, so nimmt die dritte Seite ab.

142 Wer würde aber diese Sätze alle auswendig behalten wollen?

143. Gleichwohl, wenn es Cotesen eingefallen wäre, Abnehmen und Zunehmen zu unterscheiden, so hätte er bey jedem seiner Sätze ohngefähr soviel einzelne Fälle unterscheiden müssen, dieses erfoderte seine Lehrart, und die blosse Betrachtung der Figur, ohne den Gebrauch der analytischen Zeichen, und der allgemeinen Sätze welche bestimmen wenn die trigonometrischen Linien bejaht oder verneint werden.

Dadurch wäre sein Aufsatz zu einem völligen Buche erwachsen.

Er sagt aber gar nichts davon ob die Veränderungen, Vermehrungen oder Verminderungen sind. Und ich sehe also nicht wie man die Vorschriften, die er zuerst, von Berechnung der Veränderungen gegeben hat, sicher und bequem genug brauchen kann, wenn man diesen wesentlichen Umstand nicht auf eine leichte Art zu erkennen weiß

Durchzählung der Fälle die bey veränderlichen Seiten und Winkeln vorkommen können.

144) Es bleiben ungeändert

I; Eine Seite, und ein Winkel — Man sehe

A) Der anliegende, also — unten

ungeändert c; B (111) — 145

B) Der gegenüberstehende

also a; A, (121) — 146

II; Zwo Seiten; b; c; (128) — 147

III; Zweene Winkel (178) — 148

Auf so vielerley Art lassen sich zwey Dinge unveränderlich annehmen. Bey jeder dieser drey Voraussetzungen, kann man die Verhältniß von zwo Veränderungen suchen. Wie vielerley solche Verhältnisse können gesucht werden zeigt folgendes; wo ich auch Cotesens Lehrsätze angeführt habe.

145) In I; A; ändern sich, zweene Winkel, so daß $dA = -dC$; und zwo Seiten, b, a,

Veränderungen	Cotes Theor
α) db: da (115)	I
β) db: dA (118)	II
γ) da: dA (120)	III

146) In I; B; ändern sich zweene Winkel, daß $dB = -dC$; und zwo Seiten b, c;

	Cot. Th
δ) dC: dc (124)	IIII
dB: db	
dB: dc (125)	
ε) db; dc (127)	V

147)

147) In 144) II; ändern sich die drey Winkel so daß $d A = -dB - dC$; und die Seite a;

Cot. Th.

ζ) $dB : dC$ (130) VIIII
η) $dA : dB : dC$ (132) VI
θ) $dA : da$ (133), (134) VII
ι) $da : dB$, dC (136), (137) VII$_I$

148) In 144 III; ändern sich die Seiten,
κ) $da : db$ (138) X

149. Cotes druckt alles durch Proportionen aus, die gegenwärtigen Gleichungen sind zur Rechnung bequemer, und man kann jede leicht so einrichten, daß alles gegebene auf eine Seite, alles gesuchte auf die andere kömmt.

150 Z. E. wenn in (124) die Veränderung des Winkels gegeben wäre, daraus man die Veränderung der Seite berechnen wollte, so wäre

$dc = c . \cot C . dC$

151. Uebrigens muß man die Veränderungen der Winkel, nach 99; in Theilen des Halbmessers ausdrucken wenn sie in Theilen des Kreises gegeben sind.

Oder umgekehrt wenn man nach diesen Formeln Veränderungen der Winkel berechnet, so findet man sie in Theilen des Halbmessers, und muß sie also nach (100) auf Theile des Kreises bringen.

153.

153. Ein beträchtlicher Gebrauch dieser Formeln zeigt sich in der practischen Geometrie, wenn man aus den Winkeln Linien oder umgekehrt berechnet und wissen will, was für Fehler es geben kann, wenn man die Grössen die unmittelbar gemessen wurden und der Rechnung zum Grunde dienen, nicht vollkommen richtig gemessen hat.

Ich habe etwas davon in einem Aufsatze, **von Fehlern beym Feldmessen** gehandelt der sich in den Schriften der K. Schwed. Ak. d. Wiss. für 1753 befindet, in meiner Uebersetzung 15 Bande 131 S. ob ich wohl die cotesischen Sätze daselbst nicht gebraucht habe.

Folgendes Exempel wird zeigen wie solche Rechnungen zu führen sind.

154. Wenn man in einem Dreyecke zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gemessen hat, und daraus die dritte Seite berechnet, so fragt es sich, was es für einen Fehler in dieser Seite giebt wenn bey dem Winkel ein Fehler ist begangen worden. Die Seiten werden als richtig gemessen angenommen.

155. Dieß läßt sich uach (133) berechnen; Es ist

$$da = \frac{b\ c.\ \sin A.\ dA}{a}$$

156. Es sey $b = 75$; $c = 58$; $A = 108° 24'$ davon zu 180° die Ergänzung $71° 36'$ ist.

Daraus findet sich $a = 108, 32$.

Gesetzt nun man wäre bey dem Winkel um $5' = 300''$; ungewiß, uud wollte also wissen wieviel

sich

sich die gesuchte Seite ändern würde wenn der Winkel um soviel anders angenommen würde. So ist $dA = 300''$; Also

log e = 4,6855749 — 10 (98)
log 300 = 2,4771212
log sin A = 9,9772095 — 10
log c = 1,7634280
log b = 1,8750613

20,7783949 — 20

abgezogen log a = 2,0347087

log da = 0,7436862 — 2

gehört zu 0,055422

Um so viel hat man die Seite zu klein gefunden, wenn der Winkel wirklich 108° 29′ ist oder zu groß wenn er nur 108° 19′ wäre.

Ich habe dieß Exempel a. a. O. der Schwed. Abh. berechnet, und genau eben das heraus gebracht, auch ist meine dortige Formel mit gegenwärtiger einerley. Es sind nähmlich

dorten	C	ζ	a	b	q	p	e
hie	A	a	b	c	cos A	sin A	dA

157 Zwar ist das dortige e, der Sinus von 5′ daher statt der beyden Zeilen der Rechnung, durch welche hie die 5′ in Decimaltheilen des Halbmessers ausgedruckt werden, dort nur eine ist; bey solchen kleinen Bogen sind aber Sinus und Länge des Bogens nicht merklich unterschieden. So findet sich

log 300 e = 7,1626961 — 10

wel-

welches von log sin 5′ wie er in den Tafeln steht, nur in der letzten Zifer um 1 unterschieden ist.

158 Allgemein aber ist es nicht so bequem in den Formeln den Sinus der kleinern Veränderung des Winkels, oder ihre Tangente, zu brauchen, als diese kleine Veränderung selbst. Denn wenn sie nicht gerade ganze Minuten beträgt, so fände man jene trigonometrische Linien für sie in den Tafeln nicht.

159. Bey dem Exempel (154) war die ihm gehörige Formel (133) leicht zu finden. Hätte man dieses nicht so geschwind übersehn können, so würde man sich folgendergestalt verhalten haben zu entdecken wo die Formel für dieses Exempel steht.

Weil bey ihm zwo Seiten bleiben so gehört es für 144; II;

Also zu einem der in (147) unterschiedenen Fälle.

Und, weil der eingeschlossene Winkel und die Seite ihm gegen über, betrachtet werden, zu θ.

160) Aus den Formeln welche für diese Frage dort angezeigt sind, wähle ich (133) weil sie nebst den beyden unveränderlichen Seiten nichts weiter enthält, als den Winkel und die Seite deren Veränderungen ich mit einander vergleichen will.

Diesen Winkel und diese Seite, mußte ich also schon zum voraus wenigstens beynahe wissen, wenn es mir was nützen sollte zu berechnen wieviel sich die Seite bey einer kleinen Veränderung des Winkels ändert.

161) Die andern Winkel aber hatte ich, nur zu dieser Absicht nicht nöthig, und also bediente ich mich der Formeln nicht, in denen sie vorkamen.

162) Wer sich blos nach Cotesens Vorschriften richtet, der muß (134; II) brauchen, denn das ist die Regel die Cotesens VII Lehrsatz hier giebt. Was ich in (133) gezeigt habe, erwähnet er wenigstens nicht ausdrücklich.

163. Man muß also bey Cotesens Lehrsätzen zuweilen Dinge berechnen die man sonst nicht zu berechnen nöthig hätte, nur weil sie nach diesen Lehrsätzen, nöthig sind die Veränderungen zu vergleichen.

Auch hieraus erhellt die vorzügliche Bequemlichkeit der analytischen Formeln, aus denen man allemahl die wählen kann, bey der man das wenigste, nur der Formel wegen zu berechnen braucht.

164. Es könnte jemanden einfallen: Eine solche Rechnung wie (155) sey nicht viel kürzer als wenn man das ganze Exempel von neuem auf die gewöhnliche Art rechnete so daß man die Seiten beybehielte, und ihren Winkel 108° 29′ setzte.

165 Daß aber diese Rechnung etwas kürzer ist, wird man doch finden.

166 Sie giebt auch zugleich wieviel die Seite wächst oder abnimmt, nachdem der Winkel wächst oder abnimmt. Nach der gewöhnlichen Art müßte jedes besonders berechnet werden.

167 Endlich, welches die Hauptsache ist, so kommen am häufigsten Veränderungen der Winkel

vor,

vor, die nicht lauter ganze Minuten, sondern Minuten mit Secund.n betragen. Da liesse sich die gewöhnliche Rechnung, wenigstens mit den gemeinen Tafeln nicht wohl anbringen.

Einen Winkel in einer schiefen Ebene in den ihm zugehörigen horizontalen zu verwandeln.

168. Beym Feldmessen nimmt man an, der Winkelmesser stehe wagrecht und die Diopter, oder das Fernrohr dessen man sich nach den Gegenständen zu visiren bedient, sey der Ebene des Werkzeuges parallel. So bekömmt man Winkel deren Schenkel horizontal sind.

169. Wenn das Instrument nicht horizontal steht so wird von einem Winkel den man solchergestalt mißt wenigstens ein Schenkel, nicht horizontal seyn, vielleicht keiner.

Aber diesen Winkel will man gewöhnlich nicht wissen, sondern den, welchen ein paar Verticalflächen, durchs Auge und die beyden Gegenstände, mit einander machen. Diese beyden Verticalflächen, schneiden die Horizontalfläche durchs Auge in ein paar Horizontallinien, und die machen den gesuchten Winkel.

Man muß also wissen, wieviel jener den das Instrument angiebt, von diesem unterschieden ist.

170. Es kann ein Versehen des Feldmessers seyn, daß sein Werkzeug nicht wagrecht steht: wenn er sich der Gefahr eines solchen Versehens

ausgesetzt lassen will, so muß er wenigstens ohngefähr wissen wieviel dadurch der Winkel anders wird, als er denselben annimt.

171. Bey manchen Werkzeugen ist es nothwendig daß des Winkels Schenkel schiefe Richtungen bekomme.

Wenn das Werkzeug ein Fernrohr hat das sich der Ebene des Werkzeugs parallel dreht aber nicht in einer Ebene die auf des Werkzeuges seiner senkrecht wäre, so kann das Werkzeug nur alsdenn in einer wagrechten Stellung gebraucht werden, wenn sich beyde Gegenstände in einer Horizontalfläche durchs Auge befinden.

Dieses findet selten statt. Man neigt also hier das Werkzeug vorsetzlich, daß jeder Schenkel des Winkels eine andere Neigung gegen den Horizont hat.

172 Man muß da Mittel haben, diese Neigungen zu messen, und daraus den horizontalen Winkel bestimmen, der diesem Winkel in einer schiefen Ebene zugehört.

173. Ich bediene mich der Ausdrückungen: Horizontalfläche und Neigungen von Schenkeln eines Winkels gegen sie, weil man daraus, eine Absicht und einen Gebrauch dieser Untersuchung, am leichtesten versteht.

174 An sich selbst ist sie allgemeiner, und liesse sich so abfassen: Die beyden Schenkel eines Winkels, haben gegebene Neigungen, gegen eine gegebene Ebene; durch sie stehen Ebenen senkrecht auf dieser Ebene: Man sucht was diese beyden Ebenen,

oder ihre Durchschnitte mit der gegebenen, für einen Winkel mit einander machen.

175. Die gegebene Ebene könnte alsdenn selbst vertical seyn, z. E. eines Quadranten damit man Höhen mißt.

176. Wie in 173; läßt sich also die Aufgabe folgendergestalt abfassen.

$POQ = \delta$ ist ein Winkel, dessen jeder Schenkel gegen den Horizont eine andere Neigung hat. Fig. 2. 2f.

177 Man nehme $OP = OQ = 1$ stelle sich durch O eine wagrechte Ebene vor, und fälle auf solche PR; QS; lothrecht so sind $POR = p$; $QOS = q$; dieser Linien Neigungen gegen den Horizont.

178) $PR = \sin p$; $OR = \cos p$; $QS = \sin q$
$OS = \cos pq$.

179) Es steht mir frey anzunehmen daß q der kleinere von beyden Winkeln ist.

180) Man ziehe QT mit RS parallel, so ist 3f.
$PT = \sin p - \sin q$
$= 2 . \cos \frac{1}{2}(p+q) . \sin \frac{1}{2}(p-q)$ (33) Fig. 3.

181) $PQ = 2 . \sin \frac{1}{2}\delta$ (Trig. 18 S.)

182) Man hat also $QT = \sqrt{(PQ^2 - PT^2)}$

183) Weil $QT = RS$; so giebt sich im Dreyecke ROS, der genannte Winkel, aus den drey gegebenen Seiten (178; 182)

184) Man sieht nun aber auch leicht, daß sich die Frage auf sphärische Trigonometrie bringen läßt. 1f.

Auf OR; OS; nehme man $Or = Os = 1$; und ziehe die Bogen Pr; Qs; rs; Fig. 4

Die ersten beyden stehen auf dem letzten senkrecht, weil die Ebenen l' O r; Q O l auf der Ebene r O l senkrecht sind;

Daher gehen l Q, r P, durch des Bogens r l Pol.

sf. Dieser Pol sey M; so hat der Winkel M zu seinem Maasse den Bogen r l; ist also = ROS; Fig 5

Ferner ist M P = 90° — p; M Q = 90° — q

Q l' = P O Q;

Wenn man also den Winkel R O S = M = α setzt, so heißt die Frage:

Im Kugeldreyecke Q M P, aus den drey Seiten, den Winkel M zu finden.

185. Von den beyden Auflösungen welche sphär. Trig. 8 S. giebt, ist hier zu einer allgemeinen Formel diejenige am bequemsten, die des gesuchten Winkels Cosinus, durch der Seiten Sinusse und Cosinusse giebt. Für die gegenwärtigen Umstände eingerichtet wird sie

$$186)\quad \cos\alpha = \frac{\cos\delta - \sin p.\sin q}{\cos p.\cos q}$$

oder

$$187)\quad \cos\alpha = \frac{\cos\delta}{\cos p.\cos q} - \text{tang p. tang q}$$

188) Man bringt eben das heraus wenn man die Rechnung nach (183) fortsetzt. Ich wollte aber lieber hie die Anwendung der sphärischen Trigonometrie zeigen.

189) Man kann schon diese Formel zu einer bequ-

quemen und ziemlich scharfen Rechnung brauchen, wenn man Logarithmen für Zahlen bis 100000 hat.

190) Exempel. $\delta = 57^\circ\ 25^{\prime}$; $p = 4^\circ\ 58^{\prime}$
$q = 2^\circ\ 25^{\prime}$

log cos p = 9,9983663 — 10
log cos q = 9,9996136 — 10

Summe = 0,9979799 — 1 abgezogen
von log cos δ = 9,7312064 — 10

$$\log \frac{\cos \delta}{\cos p . \cos q} = 0,7332265 - 1$$

giebt diese Grösse = 0,54106
log tang p = 8,9390321 — 10
log tang q = 8,6253518 — 10

Summe = 0,5643839 — 3
gehört zu 0,0036676 abgezogen
von 0,54106

cos α = 0,5373923

fällt zwischen die Sinus von $32^\circ\ 30^{\prime}$ und $32^\circ\ 30^{\prime}\ 36^{\prime\prime}$ wie man aus Gellibrands Tafeln sieht. Auf die gewöhnliche Art Proportionaltheile gesucht, findet sich daß diese Zahl als Sinus zu $32^\circ\ 30^{\prime}\ 23^{\prime\prime}$ gehört, also giebt sie $\alpha = 57^\circ\ 29^{\prime}\ 37^{\prime\prime}$; um $4^{\prime}\ 37^{\prime\prime}$ grösser als δ.

191. Nach voriger Formel findet man allezeit den gesuchten Winkel in Minuten richtig. Weil aber im Exempel sein Cosinus eigentlich nur bis auf fünf Decimalstellen gefunden wird, so könnte man zweifeln ob die Näherung bis auf Secunden richtig

wäre. Man kann also überhaupt noch versuchen, ob sich etwa für den Cosinus ein Ausdruck finden läßt, der eine schärfere Rechnung verstattete.

192) Es sey

$\frac{1}{2}(\cos(p-q)-\cos(p+q)) = a;$
$\frac{1}{2}(\cos(p-q)+\cos(p+q) = b;$
So ist aus (10; 11;)

$$193)\quad \cos\alpha = \frac{\cos\delta - a}{b}$$

193. Zum Exempel diene das vorige, nur setze ich $\delta = 57^\circ\ 24'\ 36''$; Es sind

$p+q = 7^\circ\ 23'$; $p-q = 2^\circ\ 33'$;
$\cos(p+q) = 0,9917086$
$\cos(p-q) = 0,9990098$

$2b = 1,9907184$
$2a = 0,0073012$
$b = 0,9953592$
$a = 0,0036506$
$\cos\delta = 0,5386237$

$\cos\delta - a = 0,5349731$

Für dieses Bruchs Logarithmen, nimmt man hie ohne merklichen Irrthum den von 0,53497.

Wäre es der Mühe werth so könnte man für ihn leicht den Logarithmen, durch Proportionaltheile aus den Logarithmen von 53497 u. 53498 suchen.

Die Rechnung nach (193) wird so vollendet:

$10 + \log(\cos\delta - a) = 9,7283294$
abgezogen $\log b = 4,9979801 - 5$
$\log$ tab $\cos\alpha = 9,7303493$

giebt

giebt diesen Winkel $= 57° 29' +$ in den gemeinen Tafeln. Gellibrands Tafeln zeigen, daß er über die angegebenen Minuten noch nicht $24''$ beträgt. Durch Proportionaltheile finde ich ihn $57° 29' 20'' —$ also um $4' 44''$ grösser als den hier angenommenen δ.

Eben so habe ich diesen gesuchten Winkel aus Sphär. Trig. 8 S. nach der gewöhnlichern Rechnung, durch den Sinus seiner Hälfte gefunden.

194. Das bisherige ist allgemein brauchbar, die Winkel p, q; mögen groß oder klein seyn.

195. Wenn sie aber klein sind, so könnte man versuchen, ob sich etwa nur der Unterschied zwischen δ u. α, durch eine bequeme Näherung angeben liesse, weil dieser Unterschied alsdenn auch klein seyn muß.

196. Alsdenn würde man sie selbst statt ihrer Sinusse u. Tangenten setzen, und wenn man etwa Ausdrückungen bekömmt, wo ihrer Sinusse und Tangenten Quadrate, oder höhere Potenzen vorkommen, diese höhern Potenzen, und selbst wohl die Quadrate als unbeträchtlich weglassen.

197. Solchergestalt ist

$\text{col } p = 1 - \frac{1}{2} p^2$ (An. Un. 297)

$\text{sec } p = 1 + \frac{1}{2} p^2$ (An. Un. 303)

198) In der Formel (187) ist der erste, oder der bejahte Theil $= \text{col } \delta . \text{sec } p \text{ sec } q$ Man mache also der beyden Secanten Product so daß man sie nach (197) ausdruckt, wo für die zweyte nur q statt p gesetzt wird. Die Potenzen die höher als das Quadrat sind, werden weggelassen.

So erhält man beynahe

199) $\text{col}\,\alpha = \text{col}\,\delta + \frac{1}{2}\text{col}\,\delta.\,(p^2+q^2) - p.q$

200) Es sey $\alpha = \delta + x$ so ist allemahl
$\text{col}\,\alpha = \text{col}\,\delta.\,\text{col}\,x - \text{sin}\,\delta.\,\text{sin}\,x$

201) Wenn aber p, q, also auch x, klein sind, so ist beynahe $\text{col}\,x = 1$; und $\text{sin}\,x = x$; also
$\text{col}\,\alpha = \text{col}\,\delta - x.\,\text{sin}\,\delta$

202) Also 199; 201; gleich gesetzt
$x.\,\text{sin}\,\delta = p.q - \frac{1}{2}.\,\text{col}\,\delta.\,(p^2+q^2)$ Folglich

203) $x = \frac{p.q}{\text{sin}\,\delta} - \frac{1}{2}.\,\text{cot}\,\delta.\,(p^2+q^2)$

204. Diese Näherung läßt sich noch etwas anders ausdrucken. Es ist nähmlich
$p.q = \frac{1}{4}(p+q)^2 - \frac{1}{4}.(p-q)^2$
$p^2+q^2 = \frac{1}{2}(p+q)^2 + \frac{1}{2}(p-q)^2$
also wird das was in (202) rechter Hand steht
$\frac{1}{4}(p+q)^2.(1-\text{col}\,\delta) - \frac{1}{4}(p-q)^2.(1+\text{col}\,\delta)$
$= (\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q)^2.\,2.\,(\text{sin}\,\frac{1}{2}\delta)^2$
$-(\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)^2.\,2.\,(\text{col}\,\frac{1}{2}\delta)^2$
Dividirt man dieses mit $\text{sin}\,\delta$ oder mit $2.\,\text{sin}\,\frac{1}{2}\delta.\,\text{col}\,\frac{1}{2}\delta$, so findet sich nach (203)

205) $x = (\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q)^2.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\delta - (\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)^2.\,\text{cot}\,\frac{1}{2}\delta$

206) Wenn $p = f.e$; $q = g.e$, daß f, g, die Mengen von Secunden sind die auf p, q, gehn, und eben so $x = y.e$ (85); So ist
$y = (\frac{1}{2}(f+g))^2.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\delta - (\frac{1}{2}(f-g))^2.\,\text{cot}\,\frac{1}{2}\delta).e$

207. Im Exempel (193) ist $\frac{1}{2}\delta = 28^\circ\ 42^{\prime}$
$18^{\prime}$

18^{11} wo ich die 18^{m} hier weglasse; $\frac{1}{2}(f+g) =$
13290; $\frac{1}{2}(f-g) = 4590$; also
$2 \log \frac{1}{2}(f+g) = 8,2470500$
$\log \text{tang} \frac{1}{2}\delta = 9,7383714 - 10$

Summe $= 7,9854214$
$\log e = -5,3144251$

$2,6709963$

gehört zu 468, 2.

$2 \log \frac{1}{2}(f-g) = 7,3236254$
$\log \cot \frac{1}{2}\delta = 0,2616286$

$7,5852540$
$-5,3144251$

$2,2708289$

gehört zu 186, 6; abgezogen
von 468, 8

$y = 282,2$
giebt $x = 4^{1}\ 42^{11} +$

208. Die Formeln (203) (205) habe ich in einem Manuscripte des seel. Prof. Mayers gefunden welches Messungen in der Gegend um Göttingen 1753; enthält; aber ohne einigen Beweis, und nichts von der (187) auf welcher sie beruhen, die allemahl wahr ist, und zu der sie nur Näherungen sind.

209 Er hat in diesem Manuscripte, viel Winkel deren Schenkel schief waren, auf horizontale gebracht und sich dabey vermuthlich der Formel (205) bedient, von der Rechnung selbst aber giebt er kein Beyspiel, keine Vorschriften wie sie anzustellen ist.

Ich

Ich kann also nicht sagen ob er es so gemacht hat wie ich (206).

210 Wenigstens sehe ich keine bequemere Art diese Rechnung anzustellen. Was sie mühsam macht, ist daß in ihr Quadrate der Winkel p, q, vorkommen. Wären von ihnen nur die ersten Potenzen vorhanden, wie vom Winkel x; so hübe sich e auf beyden Seiten auf, weil es auf beyden Seiten nur von der ersten Potenz vorhanden wäre, und man fände gar leicht, aus p, q, in Secunden ausgedruckt, auch x in Secunden. Hier aber sehe ich nicht wie man es kürzer als ich es bewerkstelliget hab:, machen kann.

211. Ueberhaupt wird wohl diese Näherung so sehr man auch die Rechnung abkürzt, doch wenigstens eben so mühsam berechnet als der Winkel α nach (193)

Berechnet man so diesen Winkel, so findet man ihn gleich innerhalb einer Minute, aus den gemeinen Tafeln, innerhalb noch engerer Gränzen, aus Gellibrands Tafeln.

Und selbst wenn man ihn aus dem Sinus seiner Hälfte auf die gewöhnliche Art sucht, findet man ihn innerhalb 2 Minuten.

Daraus, da er in so enge Gränzen eingeschlossen ist, läßt er sich bis auf Secunden wenn man das verlangt, ohne Zweifel zuverläßiger durch Proportionaltheile finden, als durch Mayers Näherungen, wo x einige Minuten austrägt und Winkel, selbst

von

von etlichen Graden, statt ihrer Tangenten gesetzt werden.

Für $q = o$

212. Wird in (186) $\cos \alpha = \frac{\cos \delta}{\cos p}$

Gebrauch hievon bey Werkzeugen zum Winkelmessen.

213. An einem Werkzeuge zum Winkelmessen sey OS ein unbewegliches Fernrohr, in der Ebene des Werkzeuges Fig 6 OP ein bewegliches das sich um O dreht, aber nicht der Ebene des Werkzeuges parallel, sondern so, daß es mit ihr den Winkel p macht. Fig.

214 Wenn nun jedes Fernrohr nach einem Gegenstande gerichtet ist, so machen die Linien von beyden Gegenständen am Auge mit einander den Winkel $SOP = \delta$

215 Statt dieses aber findet man, auf dem in Grade u. s. w. getheilten Rande des Werkzeuges den Winkel $SOR = \alpha$ weil man die Grade von S bis unter das Fernrohr OP zählen wird, also bis an R; gegentheils den Winkel SOP unmittelbar nicht messen kann.

216. Berechnen aber kann man ihn wenn man p weiß, denn für ihn ist $\cos \delta = \cos \alpha . \cos p$

217. Weil hier p klein seyn wird, so setze man $\delta = \alpha - x$ wo auch x klein seyn wird also $\cos \delta = \cos \alpha + x \sin \alpha$; imgleichen, aus (216) $= \cos \alpha . (1 - \frac{1}{2} p^2)$. Beyde Werthe gleich gesetzt geben

218)

218) $x = -\cot\alpha . \frac{1}{2} p^2$

219) Also $\delta = \alpha + \cot\alpha . \frac{1}{2} p^2$

220) Dieß ist schon in (203) enthalten, nur $q = o$ gesetzt, und cot α statt cot δ geschrieben. Daß die letztere Verwechslung bey Winkeln die wenig unterschieden sind, verstattet ist, sieht man leicht, indessen schadet es nichts die kurze Rechnung (217) zu wiederhohlen dadurch diese Formel hier unmittelbar gefunden wird.

221) In den Zeichen die (206) sind gebraucht worden ist $\delta = \alpha + \frac{1}{2} t^2 . \cot\alpha . e$

Anwendung auf Quadranten. 1) Mit beweglichem Fernrohre. Verbesserung der Weiten vom Scheitel.

7f. 222. SOT Fig 7 ist ein Quadrant, von dessen Mittelpuncte O, das Loth OL nach OS herabhängt OP ein bewegliches Fernrohr an ihm, nach einem Gegenstande gerichtet der sich in der Linie OF befindet.

So ist dieses Gegenstandes eigentliche Weite vom Scheitel der Winkel SOP, statt derselben giebt der Quadrant SOR an.

223 Also addirt man zu α, der Weite vom Scheitel die der Quadrant angiebt, $\frac{1}{2} f^2 . \cot\alpha . e$

2) Mit unbeweglichem Fernrohre. Verbesserung der Höhen

8f. 224. VOR Fig 8 sey dergleichen Quadrant, wo das Fernrohr OP fest ist, und den Winkel POK mit der Ebene des Quadranten macht. Es ist wieder

nach

nach einem Gegenstande in der Linie OF gerichtet, so ist, wie vorhin, SOR die Weite vom Scheitel die der Quadrant angiebt, SOP die eigentliche. Auf dergleichen Quadranten aber, sind von V; 90 Grade gegen R zu abgetheilt, und man findet also vermittelst seiner, die Höhe die er angiebt

$VOS = 90° - \alpha = \beta$

Die eigentliche Höhe ist um so viel kleiner, um so viel. die eigentliche Weite vom Scheitel grösser ist als α; das ist um die (223) angegebene Verbesserung.

225 Diese Verbesserung, durch die Höhe welche der Quadrant angiebt ausgedruckt, ist

$\frac{1}{2} f^2 . \tang \beta . e$

Soviel also wird von der Höhe $VOS = \beta$ die der Quadrant angiebt, abgezogen.

226. In dieen beyden Fällen (222; 224) nehme ich an, des Quadranten Ebene stehe vollkommen lothrecht.

Wenn des Quadranten Ebene nicht lothrecht steht.

227. Das Loth OPL Fig 9 mache alsdenn mit des Quadranten Ebene, den Winkel POR, der f Secunden halte, SO sey das Fernrohr, beweglich, oder unbeweglich, so ist wiederum $SOR = \alpha$ die Weite vom Scheitel die der Quadrant angiebt und VOR die Höhe. 9f.

228 Man muß also die Verbesserung (223) zu der Weite vom Scheitel die der Quadrant angiebt addi-

addiren oder, von der Höhe die er angiebt, die Verbesserung (225) abziehn.

Erläuterung eines Zweifels.

229. Wie SOP grösser ist als SOR, so ist auch VOP grösser als VOR.

Nun ist SOP die eigentliche Weite vom Scheitel.

Glaubte jemand, VOP wäre eben so die eigentliche Höhe, so müßte er schliessen auch diese wäre grösser als die welche der Quadrant angiebt, VOR; und folglich müßte VOR nicht vermindert werden um die eigentliche Höhe zu bekommen, wie doch (228) befiehlt.

Weil aber (228) aus offenbahr richtigen Sätzen ist hergeleitet worden, so kann VOK nicht die eigentliche Höhe seyn.

230 Nähmlich, die drey Linien, die von O nach S, V, P, gehn, machen an O einen körperlichen Winkel, der in drey ebene eingeschlossen ist.

Zweene von diesen ebenen Winkeln, betragen zusammen allemahl mehr, als der dritte. (Eucl. XI; 20)

Weil nun $SOV = 90°$ so ist

$SOP + POV > 90°$.

Der erste Winkel ist die eigentliche Weite vom Scheitel, folglich POV grösser als die eigentliche Höhe.

Folglich kann auch VOR grösser als die eigentliche Höhe seyn, wenn er gleich kleiner als VOP ist.

Dieses können ist genug gegenwärtigen Zweifel zu heben, das seyn zeigt (228)

Wenn

Wenn das Fernrohr nicht in der Ebene des Quadranten, und diese Ebene auch nicht lothrecht wäre.

231. Es ist leicht zu sehn, daß alsdenn die Ebene des Quadranten ist, was in (176) die Horizontalfläche ist genannt worden und also die Sache nach der dortigen Untersuchung zu beurtheilen wäre.

Wenn die Winkel α, δ, selbst klein werden.

232. Alsdenn wären die Näherungen (203; 206; 223) nicht recht zuverläßig, wie man leicht daraus sieht, daß x als ein Unterschied zwischen den beyden Winkeln ist angenommen worden, der in Vergleichung mit ihnen nicht sehr beträchtlich wäre, hier aber könnte dieser Unterschied, an sich selbst vielleicht nur wenige Minuten betragen und doch in Vergleichung mit jedem der beyden Winkel die er unterscheidet ansehnlich seyn.

233. Die hieher gehörige beynahe wahre Formel findet sich folgendergestalt.

Man drucke der Winkel die hier auch klein angenommen werden, ihre Cosinus so aus, wie man der kleinen Winkel Cosinus in (197) ausdruckte.

So giebt (199) folgendes

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) - pq$$

234) Hie, lasse man weg was sich aufhebt, ändere die Zeichen in die entgegengesetzten und schreibe m e statt α, n e statt δ, statt p; q, auch ihre Ausdruckungen in Secunden (206) so kömmt

235) $m^2 = n^2 + 2.f.g - f^2 - g^2$

236) Da sind f, g, gegeben, und man kann nach Gefallen m aus n; oder n aus m finden, aber durch Ausziehung einer Quadratwurzel.

237. Diese Formel wird insbesondere deßwegen brauchbar seyn, weil die kleinen Winkel selten in lauter ganzen Minuten gegeben sind, und also die Rechnung nach (193) nicht bequem anzustellen wäre.

238 Eben diese Näherung findet sich aus Betrachtung der Figur folgendergestalt. (5 Fig)

f. Man nehme $MN = MQ$; so ist QN der Bogen eines Parallelkreises mit $\int r$; dem letztern ähnlich (Geom 52 S); Sein Halbmesser ist $\sin QM = \cos q$; also seine Länge $= \alpha . \cos q$

Dieß bleibt allemahl, die Winkel mögen groß oder klein seyn.

239. Sind aber $M = \alpha$; auch p, q, klein, so ist auch $PN = p - q$ klein, und das Dreyeck QNP; das allemahl bey N rechtwinklicht ist, kann nun als geradelinicht angesehen werden.

Da ist also

$\delta^2 = \alpha^2 . (\cos q)^2 + (p - q)^2$

wo $\cos q^2 = 1 - q^2$ aber $\alpha^2 q^2$ weggelassen wird, da sich denn die Gleichung (233) findet.

Für $q = 0$

240 Da wird aus (235) $m^2 = n^2 - f^2$

241. Diese Formel ist zu gebrauchen, wenn in (214) der Winkel SOP klein ist, oder in (222 u. f.) bey grossen Höhen wo F dem Scheitel sehr nahe wäre.

242. Will man das gebrauchen was von 213 bis hieher ist gesagt worden, so muß man wissen wie der Winkel gefunden wird den die Axe eines Fernrohres mit der Ebene des Winkelmessers oder Quadranten macht u. s. w.

Dieses läßt sich hier nicht lehren, weil es noch andere Untersuchungen und eine umständlichere Beschreibung solcher Werkzeuge erfodert.

Indessen dient gegenwärtiges, den welcher solche Werkzeuge braucht zu erinnern, was aus dergleichen Unrichtigkeiten für Fehler entstehen können.

Er kann selbst etwa muthmaßlich annehmen, wie groß die Unrichtigkeit in der Stellung des Fernrohrs oder des Quadranten seyn möchte, und daraus berechnen was sie für einen Fehler im Winkel geben kann.

So wird er wenigstens wissen, was für Fehlern seine Arbeit ausgesetzt ist.

Und das wird ihn selbst auf Methoden leiten jene Unrichtigkeiten zu bestimmen.

Solche Methoden sollen ins künftige ausführlicher gezeigt werden.

Geometrische Sätze von schiefen Ebenen.

243) Weil kein Cosinus grösser als 1 werden kann, so ist in (186) $\cos\delta = \sin p . \sin q$ nicht grösser als $\cos p . \cos q$ daher $\sin p . \sin q$ auf die andere Seite gebracht, $\cos\delta$ nicht grösser als $\cos(p-q)$

Weil nun p, q hier keine stumpfen Winkel sind, so ist p — q auch kein stumpfer Winkel, also der Cosinus davon bejaht, also

244) δ nicht kleiner als p — q

Das ist: Ein Winkel auf einer schiefen Ebene, ist nicht kleiner als der Unterschied der Neiguugen welche seine beyden Schenkel gegen dem Horizonte haben.

245) Diesem Unterschiede gleich, wird er wenn $q = 0$; oder einer seiner Schenkel horizontal ist.

Wenn $p = 90°$

246) Da wird in (186) der Zähler $= \cos \delta - \sin q$ der Nenner $= 0$;

2f. Alsdenn aber ist PO lothrecht, folglich auch die Ebene POQ; (Geom. 47 S.) Folglich liegt das Perpendikel QS auch in dieser Ebene (Geom. 47 S. 2 Zus.) Also fallen R, S in eine gerade Linie durch O; also ist $\delta = 90° - q$ folglich der Zähler auch $= 0$;

Aber $\frac{0}{0}$ überhaupt kann jede Grösse bedeuten, nur in besondern Umständen, läßt sich bestimmen was es bedeutet (An. Un. 372)

247 Was es hier bedeutet läßt sich aus Betrachtung der Figur folgendergestalt entscheiden.

Man stelle sich vor, OQ, also auch die verticale Ebene OQS bleiben unbeweglich; OP aber drehe sich in der verticalen Ebene ROP so, daß der Winkel p wächst bis er ein rechter wird.

Als-

Alsdenn rückt R immer näher nach O und fällt zuletzt darauf.

Weil man also nun annehmen muß R befinde sich in OP; so ist für diesen Fall, des Winkels SOR Werth $SOP = 90°$; also sein Cosinus $= 0$;

In der That giebt $\cos \alpha = 0$; oder $\cos \delta = \sin p . \sin q$ ebenfalls $\cos \delta = \sin q$ wenn $p = 90°$.

Und $\frac{0}{0}$ kann unter andern Bedeutungen, auch selbst die $= 0$ haben.

Aus den Winkeln p, q, die Neigung der Ebene POQ gegen den Horizont zu finden.

247. Man verlängere PQ, bis sie RS in M schneidet, so ist M in der Horizontalfläche MOS; also OM der Durchschnitt der Ebene POQ und des Horizonts. 10 f.

248. Auf diese Linie fälle man PV senkrecht so ist $PVR = \eta$ die Neigung dieser Ebene gegen den Horizont.

249. Man hat PR (178) also braucht man nur noch PV zu suchen so hat man diese Neigung; Es wäre nähmlich $\sin \eta = \frac{PR}{PV}$

250) Es ist aber $PV = \sin POV$; also suche man diesen Winkel.

257) Im Dreyecke PMR, ist der Winkel $PMR = PQT$; der Sinus jedes dieses Winkels 35 f.

ist $\frac{PT}{PQ} = \frac{\sin p - \sin q}{2 \cdot \sin \frac{1}{2}\delta} = \sin k$; Fig. 3. wenn PMR = k. Man hat auch für diesen Sinus noch einen andern Ausdruck unten (257)

252) Also $PM = \frac{\sin p}{\sin k}$

253) Im Dreyecke OPM hat man, die nur gefundene Seite (252); $OP = 1$; und den eingeschlossenen Winkel $= 90° - \frac{1}{2}\delta$.

Dieses mit (66; 67;) verglichen, giebt dorten

	α	β	a	b	γ
hie	PMO	POM	1	$\frac{\sin p}{\sin k}$	$90° - \frac{1}{2}\delta$

254. Des dortigen f Quadrat findet sich hie

$$\frac{\sin p}{\sin k}\left(\frac{\sin p}{\sin k} - 2\sin\tfrac{1}{2}\delta\right) + 1$$

Des ersten Theils zweyter Factor wird aus

(251) $\frac{\sin q}{\sin k}$

Also $f = \frac{\sqrt{(\sin p . \sin q + \sin k^2)}}{\sin k}$

255. Daher aus (67)

$$\sin l'OM = \frac{\sin p . \cos\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{(\sin p . \sin q + \sin k^2)}}$$

256) Also aus (249)

$$\sin\eta = \frac{\sqrt{(\sin p . \sin q + \sin k^2)}}{\cos\frac{1}{2}\delta}$$

257)

257) Aus (33) ist (251)

$$\sin k = \frac{\text{col}\frac{1}{2}(p+q).\ \sin\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}\delta}$$

258) Die Grösse unter dem Wurzelzeichen in (256) ist

$$4.(\sin\tfrac{1}{2}\delta)^2.\ \sin p\ \sin q + (\sin p - \sin q)^2$$

$$4.(\sin\tfrac{1}{2}\delta)^2$$

259) Aus (Trig. 19 S. 7. Zus.) wird der Zähler in (258)

$$\sin p.\sin q.(2-2.\text{col}\,\delta) + (\sin p - \sin q)^2$$

oder

$$\sin p^2 + \sin q^2 - 2\sin p.\ \sin q.\ \text{col}\,\delta$$

260) Also wieder aus a. O. der Trigon. und zugleich statt 2 sin p. sin q den Werth aus (11) durch a in der Bedeutung (192) ausgedruckt

$$1 - \tfrac{1}{2}.(\text{col}\,2p + \text{col}\,2q) - 2a.\ \text{col}\,\delta$$

261) Dieß ist der Zähler in (258) also ist der Zähler in 256

$$\frac{\sqrt{(1 - (\frac{1}{2}(\text{col}\,2p + \text{col}\,2q) + 2a.\ \text{col}\,\delta))}}{2\sin\frac{1}{2}\delta}$$

262. Folglich

$$\sin\eta = \frac{\sqrt{(1 - (\frac{1}{2}.(\text{col}\,2p + \text{col}\,2q) + 2a.\,\text{col}\,\delta))}}{\sin\delta}$$

263) Für das Exempel (193)

$$\text{col}\,2p = 0{,}9850091$$
$$\text{col}\,2q = 0{,}9964440$$

$$\text{Summe} = 1{,}9814531$$
$$\text{halb} = 0{,}9907265$$

log 2a =

log 2a = 4,8633942 — 7
log col δ = 9,7312855 — 10

Summe = 0,5946797 — 3
giebt 2a.col δ = 0,0039326
addirt zu 0,9907265

0,9946591
abgezogen von 1

läßt 0,0053408

Für die Grösse unter dem Wurzelzeichen in (262)
Hievon der Logarithme
= 4,7276063 — 7
10 + halb = 12,8638031 — 4;
abgez. log sin δ = 9,9255938 — 10

log tab sin η = 8,9382093
giebt $\eta = 4^{\circ}\ 58^{'}\ 33^{''}$

264) Den log tab sin δ mußte ich um 10 vermindern, weil hie der Halbmesser = 1 gesetzt wird.

Hätte ich nun des Zählers Logarithmen wie er durchs Halbiren gefunden ward gebraucht, so hätte ich den Logarithmen des Sinus der Neigung so gefunden wie er für den Halbmesser = 1 gehört.

Zu diesem Logarithmen 10 addirt hätte den gegeben, der in den Tafeln der Neigung zugehört.

Deßwegen addirte ich sogleich 10 zu dem Logarithmen des Zählers.

Wenn q = 0

265. Aus (192) erhellt daß alsdenn das Quadrat

drat des Zählers in (262) $1 - \frac{1}{2}.(\cos 2p + 1)$ wird, das ist dem Quadrate von sin p gleich

266. Also $\sin \eta = \frac{\sin p}{\sin \delta}$

267. Ist also $\delta = 90°$ so wird $\eta = p$ wie bekannt ist.

Ueber einer Linie die sich in einer schiefen Ebene befindet Neigung gegen den Horizont.

268. In (250) nenne man $POM = \zeta$; Fig 10 δ so 10 f. ist $\sin p = \sin \eta . \sin \zeta$; welches nie grösser als sin p ist; nur in dem Falle, so groß, wenn $\zeta = 90°$

269. In einer geneigten Ebene, macht also keine Linie einen grössern Winkel mit dem Horizonte als die Neigung der Ebene ist.

270. Man lasse sich die Linie OP um O in der Ebene MOP drehn daß ζ von o bis 90° wächst, so wächst p von o an bis η

Wächst nun ferner ζ über 90°, so nimmt p wieder ab und zu zweenen Werthen von ζ die zusammen 180° ausmachen, gehören gleiche p (268)

271. Diese beyden Werthe, sind, einer soviel unter 90° als der andere darüber.

272 Wenn man also in der Ebene OPM, durch O auf OM ein Perpendikel setzt so haben Linien aus O in dieser Ebene, die mit dem Perpendikel gleiche Winkel auf beyden Seiten machen, gleiche Neigungen gegen den Horizont.

273) Auf einer Seite des Perpendikels giebt es nicht

nicht zwo Lienien, die gleiche Neigungen gegen den Horizont haben.

274) Auch nicht, in einer Ebene, drey Linien aus einem Puncte, die gleiche Neigungen gegen den Horizont hätten.

Untersuchung der Frage vor (168)

Wenn $p = \eta$

275) Auf diese Untersuchung führen die bisherigen Rechnungen natürlich.

276. Alsdenn ist in 255; $\sin P\,O\,M = 1$ daher

$$\sin p^2 . \operatorname{col} \tfrac{1}{2}\delta^2 = \sin p . \sin q + \frac{(\sin p - \sin q)^2}{4 . \sin \tfrac{1}{2}\delta^2}$$

Wenn man hie mit des letzten Gliedes Nenner multiplicirt und dieses Nenners Werth aus Trig. 19. S. 7. Zus. bey seinem Producte mit $\sin p . \sin q$ braucht, so hat man, was sich aufhebt weggelassen

$$\sin p^2 . \sin \delta^2 = -2 \sin p . \sin q . \operatorname{col} \delta + \sin p^2 + \sin q^2$$

oder

$$\sin q^2 = +2 \sin p . \operatorname{col} \delta . \sin q - \sin p^2 . \operatorname{col} \delta^2$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt, η statt p gesetzt

277) $\sin q = \sin \eta . \operatorname{col} \delta$

5f. 278) Eben das lehrt auch die sphärische Trigonometrie. Fig 5 Wenn P r die Neigung der Ebenen P Q, r f, messen soll, so muß nicht nur bey r, sondern auch bey P ein rechter Winkel seyn und das rechtwinklichte Dreyeck Q P M giebt eben diese Vergleichung zwischen seinen drey Seiten. (Sph. Trig. rechtw. III.)

279)

279) Also wird in (186) der Zähler
$\cos\delta - \sin\frac{1}{2}q^2 . \cos\delta = \cos\delta . \cos\eta^2$, daher

280) $\cos\alpha = \frac{\cos\delta . \cos\eta}{\cos q}$

Auch $\sin\alpha = \frac{\sin\delta}{\cos q}$ welches so wohl aus (271)
als im sphärischen Dreyecke aus (rechtw. I) folgt.

281.) Imgleichen $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos\eta}$ oder

$\cot\alpha = \cot\delta . \cos\eta$

282 Aus der gewöhnlichen Formel folgt hie

$\sin(\alpha - \delta) = \frac{\sin 2\delta}{2\cos q} . (1 - \cos\eta)$

283) Wenn also η, q, klein sind so ist beynahe
$\alpha - \delta = \frac{1}{2}\sin 2\delta . \frac{1}{2}\eta^2$ (95)

284) Wenn $\eta = fe$ so ist
$\alpha - \delta = \frac{1}{4}\sin 2\delta . f^2 e$ Secunden.

285 Eben so findet man aus (281)

$\operatorname{tang}(\alpha - \delta) = \frac{1 - \cos\eta}{\cos\eta . \cot\delta + \operatorname{tang}\delta}$

286) Wenn man die Neigung der Ebene als unveränderlich annimmt aber δ sich ändern läßt so fragt sich wie sich der Unterschied zwischen diesem Winkel und α ändert, ob er etwa wo am größten wird.

Dieses zu entscheiden ist die Formel (285) bequemer als (282). Nähmlich die für den Sinus enthält zwo veränderliche Grössen, und in ihr läßt sich $\cos\eta$ nicht anders als durch eine Wurzelgrösse ausdrucken

drucken aber die für die Tangente, enthält nur in ihrem Nenner was veränderliches.

287) Die Tangente des Unterschiedes (285) ist $=0$; für $\delta=0$, sie wird also anfangs wachsen, wenn dieser Winkel wächst

288) Weil ihr Zähler unveränderlich ist so wächst sie, so lange ihr Nenner abnimmt und fängt an abzunehmen, wenn ihr Nenner anfängt zu wachsen.

Daß nähmlich für die ersten kleinern Werthe von δ dieser Nenner abnimmt erhellt weil sein erster Theil eine Grösse enthält die vom Unendlichen abnimmt.

289. Man differentiire also diesen Nenner und sehe wie lange sein Differential verneint bleibt; So lange nimmt er ab, und die Tangente des Unterschiedes zu.

290) Aus 89; 90; ist dieses Differential

$$\frac{-\cos\eta.\,d\delta}{\sin\delta^2} + \frac{d\delta}{\cos\delta^2} \text{ oder}$$

$$\frac{d\delta.(\sin\delta^2 - \cos\eta.\cos\delta^2)}{\frac{1}{4}(\sin 2\delta)^2}$$

291) Dieses Differential ist verneint so lange seines Zählers zweyter Theil grösser ist als der erste, und das geschicht anfangs, weil eines wachsenden kleinen Winkels Cosinus anfangs viel grösser ist als sein Sinus.

292)

292) Das Differential verschwindet oder der Nenner (289) wird am kleinsten, wenn $\tang \delta = \sqrt{\col \eta}$ da ist der Unterschied (286) am größten.

293) Für grössere δ nimmt des Unterschiedes Nenner wieder zu, also der Unterschied wieder ab, bis er wieder für $\delta = 90°$ verschwindet.

294) Des größten Unterschiedes (292) Tangente (285) ist

$$\frac{1 - \col \eta}{2\sqrt{\col \eta}} \text{ oder } \frac{(\sin \frac{1}{2}\eta)^2}{\sqrt{\col \eta}}$$

295) Wenn die Neigung klein ist so kömmt in (292) der Winkel dem der größte Unterschied zugehört beynahe 45°.

296) Also der größte Unterschied selbst (284) beynahe $\frac{1}{4}$. $f^2 e^2$ Secunden

297) Für eine Neigung von 1° finde ich ihn $19,76$ Secunden.

298)

298) Die letzte Formel in (281) hat Hr. Prof. Alb. Ludw. Friedr. Meister in einer zu Göttingen 1764 herausgek. Schrift gegeben Errorum qui a situ instrumenti non librato angulorum mensuram ingrediuntur censum habet &c. §. VII. wo er auch das größte (292) bestimmt hat cor. 4; die Näherung (284) hat er nicht gegeben sondern den Winkel α aus der Formel berechnet und die Secunden dazu durch Proportionaltheile gesucht.

Von einer andern Aufgabe die in eben der Schrift aufgelöst ist soll unten geredet werden II. Abh. 3. Cap. 3. §.

II. Abhandlung

Sphärische Trigonometrie

EJEMPLAR 11

I. Capitel

Auflösungen schiefer Kugeldreyecke durch analytische Formeln und ohne Perpendikel zu ziehen.

Vorbericht.

Die gewöhnlichen Auflösungen schiefer Kugeldreyecke haben das Unbequeme, daß die Lage des Perpendikels durch welches man das schiefe Dreyeck in rechtwinklichte zerlegt, und andere damit verwandte Umstände zu bestimmen, manchmahl mühsame Aufmerksamkeit nöthig hat. Ich glaube zwar in der sphärischen Trigonometrie die sich in meinen Anfangsgründen befindet, solche Bestimmungen so viel als möglich erleichtert zu haben; sie bleiben aber doch noch immer beschwerlich.

Herr Euler hat in einer unten (87) angeführten Schrift, Formeln zu Auflösung solcher Dreyecke gegeben, bey denen diese Bemühung erspart wird. Es hat mir nützlich geschienen den Gebrauch dieser Formeln gemeiner zu machen. Zu dieser Absicht konnte ich sie nicht blos abschreiben, ich mußte auch ihre Beweise aus den gewöhnlichen Grundlehren der sphärischen Trigonometrie herleiten, da der Satz auf welchen Herr Euler sie gründet tiefe Einsicht in die Rechnung des Unendlichen erfodert.

Sie unterscheiden sich von dem gewöhnlichen Verfahren auch noch in der Art des Ausdrucks.

Die gewöhnlichen Vorschriften sind alle als Proportionen abgefaßt, wo man das Gesuchte durch eine Regel Detri herausbringt. Von den vier Gliedern einer solchen Proportion, kann vielleicht bald dieses bald jenes aus den drey übrigen gesucht werden, man pflegt denn gern die Proportion so zu ordnen, daß das Gesuchte zuletzt steht um die Regel Detri dabey auf die jedermann bekannte Art anzubringen. Daher entstehen Tafeln in denen man diese Proportionen in ihre gehörige Ordnung aufsetzt und man muß jeden vorkommenden Fall in einer solchen Tafel aufsuchen.

Die eulerischen Formeln sind als Gleichungen ausgedruckt. Man kann eine solche Gleichung gar leicht so einrichten, daß sich von den Grössen die in ihr vorkommen, bequem bald diese bald jene finden läßt. So vertritt die Gleichung, die Stelle

etli-

etlicher Proportionen und das erspart nicht nur das Papier daß die Proportionen mehr einnehmen, diese Ersparung wäre von keiner grossen Wichtigkeit, sondern auch die Zeit, welche man anwenden muß, unter den Proportionen, die aufzusuchen die man jezo gleich braucht.

Indessen halte ich doch für dienlich in den ersten Anfangsgründen, den gewöhnlichen Vortrag der sphärischen Trigonometrie beyzubehalten. Der gegenwärtige erfodert schon etwas mehr Fertigkeit in analytischen Rechnungen als Anfänger besitzen können, die etwa gleich von der ebenen Trigonometrie zur sphärischen übergehn.

Der gewöhnliche Vortrag erfodert auch bey jedem Dreyecke dessen Figur genauer zu betrachten, und übt dadurch in dem eigentlichen, geometrischen Nachdenken; Gelegenheiten zu dergleichen Uebungen sind noch immer mit beyzubehalten, da sie durch die jezt gebräuchliche Anwendung der Analysis auf die Geometrie schon so sehr vermindert werden. Erst wenn man solche Uebungen zulänglich getrieben hat, braucht man die analytischen Formeln mit Verstande, sieht, wenn sie zur Abkürzung der Arbeit dienlich sind, und wenn es nützlich ist die Figur selbst zu betrachten. Auch muß man die gewöhnlichen Regeln wissen, weil soviel Schriftsteller sich derselben noch bedienen.

Die Betrachtung der Figur führt oft auf unerwartete Uebereinstimmungen, zeigt daß Aufgaben

einerley sind, die zuerst ein ganz unterschiednes Ansehn haben.

Man hat die Lage einer geraden Linie, gegen eine gegebene schiefe Ebene; man sucht daraus eben der Linie Lage gegen den Horizont.

Diese Aufgabe kann beym Feldmessen vorkommen. Man s. unten III. C. 3. §.

Sie ist aber auch astronomisch da heißt sie: Aus eines Sterns Länge und Breite, seine Rectascension nnd Declination zu finden.

Ich mache den Anfang gegenwärtigen Aufsatzes, mit den Vorschriften rechtwinklichte Kugeldreyecke aufzulösen durch Gleichungen ausgedruckt. Die Beweise dieser Vorschriften weiß ich nicht besser zu geben als ich sie im ersten Satze der sphär. Trig. im ersten Theil meiner Anfangsgründe gegeben habe. Daher bringe ich hier nur, die daselbst bewiesenen acht Proportionen, unter der Gestalt von Gleichungen bey, sowohl damit man hier alle Formeln die zu Kugeldreyecken nöthig sind beysammen hat als auch damit die Vorschriften für rechtwinklichte, mit denen für schiefwinklichte einerley Ansehn bekommen.

Die Lehrsätze zu Auflösung schiefer Dreyecke, die im erwähnten Buche vorkommen brauche ich hie nicht.

Aber den dortigen zweyten Satz weiß ich nicht zu ersparen, wenn die vier Dinge die bey einer Frage vorkommen zwo Seiten mit zween ihnen gegenüberstehenden Winkeln sind. Da muß er entscheiden, ob das Gesuchte stumpf oder spitzig ist.

Die-

Dieses wird zeigen, worinn sich gegenwärtige Abhandlung der sphärischen Trigonometrie, von der welche ich vor diesem gegeben habe, unterscheidet.

1. **Willk. Satz** In einem sphärischen Dreyecke Fig 1 bezeichne man die innern Winkel mit den an sie geschriebenen grossen Buchstaben die gegenüberstehenden Seiten, mit den ähnlichen kleinen. 1 f.

So heissen im rechtwinklichten Dreyecke P A B, der rechte Wiukel A, die beyden schiefen B, P, die ihnen gegenüberstehenden Seiten a, b, p;

Ich sage der **innere** Winkel 2 Fig. Wenn in dem schiefen Dreyecke A B C; eine Seite in B E verlängert wäre, so bedeutet B nicht C B E, sondern desselben Nebenwinkel, welcher des Dreyecks innerer ist. 2 f.

Formeln für rechtwinklichte Dreyecke.

2) Die Theile eines rechtwinklichten Dreyecks die in einer Frage vorkommen können folgende seyn.

A) drey Seiten B) zweene Winkel, Hypothenuse C) 2 W 1 Perpendikel D) 2 Perp. 1 W. E) Hyp. Perp. anl. W. F) Hyp. Perp. gegenüberst. W.

Für diese Mannichfaltigkeiten sind in der sph. Trig. 1. Satze; Proportionen bewiesen die sich, in der Ordnung wie sie dort gezählt werden auf folgende Gleichungen bringen lassen, den Halbmesser = 1 gesetzt.

3) I) sin b = sin a. sin B für F
II) tang b = tang B. sin p D
III) cos a = cos p. cos b A
IIII) cos B = cos b. sin P C
V) cot a = cos B. cot p E
VI) cot B = cos a. tang P B
VII) cot B = cot b. sin p D
VIII) tang p = tang a. cos B E
VIIII) cot P = cos a. tang B B

4) Bey diesen Gleichungen erspart man die Tafel in der sph. Trig. 1. S. 4. Zus. wenn man nur für jede vorkommende Frage, untersucht zu welcher der sechs Mannichfaltigkeiten (2) sie gehört die ihr zukommende Gleichung aus (3) aufsucht und alsdenn sieht wie man dividiren muß das gesuchte zu finden.

Auflösungen schiefer Dreyecke.

Zf. 5. Lehrsatz 2 Fig. In jedem Dreyecke, verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Bew. Man fälle auf A B das Perpendikel CD; so ist (sph. Trig. rechtw. 1. Satz.)

1 : sin A C = sin A : sin C D

$$\frac{\sin CB : 1 = \sin CD : \sin B}{\sin CB : \sin AC = \sin A : \sin B}$$

6. Dieser Satz nach (1) ausgedruckt heißt

sin a : sin b = sin A : sin B

Weil nun hie nichts angenommen wird als daß Winkel und Seiten einander gegen über stehen, so ist auch

sin

$\sin a : \sin c = \sin A : \sin C$
$\sin b : \sin c = \sin B : \sin C$

7. Oder, wenn Gleichungen bequemer sind als Proportionen
I; $\sin a . \sin B = \sin A . \sin b$
II; $\sin a . \sin C = \sin A . \sin c$
III; $\sin b . \sin C = \sin B . \sin c$

8. Aufgabe Aus den drey Seiten des Dreyecks, den Winkel A zu finden. 3f.

9. Aufl. Der Kugel Mittelpunct sey K; also $BKC = a$; $CKA = b$; $BKA = c$; von C falle CM lothrecht auf die Ebene AKB; CN auf KA; CQ auf KB; der Kugel Halbmesser sey $= 1$; so ist

10. $CQ = \sin a$ | $CN = \sin b$
$KQ = \cos a$ | $KN = \cos b$
$NM = CN . \cos A = \sin b . \cos A$
$CM = CN . \sin A = \sin b . \sin A$

11. Nun ist (Trig. 20. S. Zus.)
$NQ^2 = KQ^2 + KN^2 - 2 . \cos NKQ . KQ . KN$
oder
$= \cos a^2 + \cos b^2 - 2 \cos a . \cos b . \cos c$

12. Ferner $\sin KNQ = \frac{KQ . \sin c}{NQ}$; aber $KNM = 90°$ (G. 46 S. 7. Zus.) also $\sin KNQ = \cos QNM$; daher $\cos QNM = \frac{\cos a . \sin c}{NQ}$

13 Daher wie vorhin

$$QM^2 = NQ^2 + NM^2 - 2\,NM.\,NQ.\,\frac{\cos a.\,\sin c}{NQ}$$

$$= NQ^2 + NM^2 - 2\cos a.\sin b.\sin c.\cos A$$

14. Es ist aber auch $QM^2 = CQ^2 - CM^2 =$
$\sin a^2 - \sin b^2.\sin A^2$

15. Diese beyden Werthe gleich gesetzt kömmt
$NQ^2 + \sin b^2.\cos A^2 - 2\cos a.\sin b.\sin c.\cos A$
$= \sin a^2 - \sin b^2.\sin A^2$

16. Daher
$NQ^2 + \sin b^2 - \sin a^2 = 2.\cos a.\sin b.\sin c.\cos A$

17. Was linker Hand steht ist (11)
$\cos a^2 + \cos b^2 - 2\cos a.\cos b.\cos c$
$+ \sin b^2 - 1 + \cos a^2$
oder $2\cos a.(\cos a - \cos b.\cos c)$

18 Daher $\dfrac{\cos a - \cos b.\cos c}{\sin b.\sin c} = \cos A$

19. Wenn man die Producte der Sinusse und Cosinusse, nach 1 Abh. 8; 9; durch Summen u. Unterschiede von Cosinussen der Summen u. Unterschiede ausdruckt so bekömmt man folgendes:
Es sey
$\cos(b-c) + \cos(b+c) = p$
$\cos(b-c) - \cos(b+c) = q$
So ist

$$\cos A = \frac{\cos a - \frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}q}$$

Weil man p u. q aus den Tafeln hat so findet man

man sehr leicht dieser Formel Zähler und Nenner, und da p u. q jedes kleiner als 2 ist so werden Zähler u. Nenner Brüche deren Logarithmen man sehr genau hat zumahl wenn man die Tafeln bis auf 100000 braucht. So läßt sich A so bequem und genau finden, als auf irgend eine andere Art.

20. Weil $1 - \text{cos}\, A = 2.(\text{sin}\, \frac{1}{2} A)^2$ (Trig. 19. S. 7. Z.), so ist dieses doppelte Quadrat

$$\frac{\text{sin b. sin c} - \text{cos a} + \text{cos b. cos c}}{\text{sin b. sin c}}$$

$$= \frac{\text{cos (b} - \text{c)} - \text{cos a}}{\text{sin b. sin c}}$$

(Trig. 19. S. 1. Zus.)

Der Zähler hievon ist (II. Abh. 30)

$$2. \text{sin}\, \tfrac{1}{2} (a + b - c). \text{sin}\, \tfrac{1}{2} (a - b + c)$$

21. Also

$$\text{sin}\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{\text{sin}\, \frac{1}{2} (a + b - c). \text{sin}\, \frac{1}{2} (a - b + c)}{\text{sin b. sin c}} \right)}$$

22 Wenn man das Quadrat von $\text{sin}\, \frac{1}{2} A$ nach (20) ausdruckt, und so von 1 abzieht, so erhält man für das Quadrat von $\text{cos}\, \frac{1}{2} A$ einen Bruch dessen Nenner 2sin b. sin c der Zähler

$$2. \text{sin b. sin c} - \text{sin b. sin c} + \text{cos a} - \text{cos b. cos c}$$
$$= \text{cos a} - \text{cos (b} + \text{c)} \text{ (Trig. 19. S. 2. Zus.)}$$
$$= 2. \text{sin}\, \tfrac{1}{2} (b + c + a). \text{sin}\, \tfrac{1}{2} (b + c - a)$$

23. Also

$$\text{col}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{\sin\tfrac{1}{2}(b+c+a).\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b.\sin c}\right)}$$

24. Daher

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{\sin\tfrac{1}{2}.(a+b-c).\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+c+a).\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}\right)}$$

25. Da in diesen Ausdrückungen die drey Seiten nur so unterschieden sind, daß eine dem gesuchten Winkel gegenübersteht, die andern beyden ihn einschliessen, so erhellt daß sich aus den gefundenen Formeln, ohne weitere Rechnung, die für andere Winkel so machen lassen:

statt	A	a	b	c
setze man	B	b	a	c
oder	C	c	b	a

26. So wird

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(b+a-c).\sin\tfrac{1}{2}(b-a+c)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+a+c).\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\left(\frac{\sin\tfrac{1}{2}(c+b-a).\sin\tfrac{1}{2}(c-b+a)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+a+c).\sin\tfrac{1}{2}(b+a-c)}\right)}$$

27. Aus den drey Seiten die Tangente der halben Summe oder des halben Unterschiedes zweener Winkel zu finden dient folgende Vorbereitung:

28 $\text{tang}\tfrac{1}{2}A \pm \text{tang}\tfrac{1}{2}B =$

$$\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}\right)}\cdot\left\{\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}\right)}\right\}$$
$$\left\{\pm\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}\right)}\right\}$$

29 Der zweyte Factor, die Summe oder Differenz der beyden Wurzelgrössen wird

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\pm\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sqrt{(\sin\frac{1}{2}(b+c-a).\sin\frac{1}{2}(a+c-b))}}$$

30. Hiemit (29) den ersten Factor (28) multiplicirt giebt die Summe oder ven Unterschied der Tangenten.

31. Der Nenner in (29) ist vermöge (26)
$\text{tang}\frac{1}{2}C.\sqrt{(\sin\frac{1}{2}(a+b+c).\sin\frac{1}{2}(a+b-c))}$
Wenn man also in (29) den Zähler läßt, den Nenner auf die jezt angezeigte Art ausdruckt und nun mit dem ersten Factor (28) multiplicirt so erhält man

32. $$\text{tang}\frac{1}{2}A\pm\text{tang}\frac{1}{2}B=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\pm\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{tang}\frac{1}{2}C.\sin\frac{1}{2}(b+a+c)}$$

33. In (1 Abh. 32; 33) setze man
$\delta=\frac{1}{2}(a+c-b)$; $\gamma=\frac{1}{2}(b+c-a)$
so ist $\delta+\gamma=c$; $\delta-\gamma=a-b$
Dieses giebt

34. $$\text{tang}\frac{1}{2}A+\text{tang}\frac{1}{2}B=\frac{2.\sin\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\text{tang}\frac{1}{2}C.\sin\frac{1}{2}(b+a+c)}$$

35. $$\text{tang}\frac{1}{2}A-\text{tang}\frac{1}{2}B=\frac{2.\sin\frac{1}{2}(a-b).\cos\frac{1}{2}c}{\text{tang}\frac{1}{2}C.\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$$

36. Aus (25), (26) ist

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}A.\,\text{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)}$$

37. Also $1 \mp \text{tang}\tfrac{1}{2}A.\,\text{tang}\tfrac{1}{2}B =$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) \mp \sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)}$$

38. Für diesen Zähler setze man in (I. A. 32; 33) $\delta = \tfrac{1}{2}(a+b+c); \gamma = \tfrac{1}{2}(a+b-c)$ also $\delta+\gamma = a+b$; $\delta-\gamma = c$;
So wird der Zähler bey dem
obern Zeichen $2.\cos\tfrac{1}{2}(a+b).\sin\tfrac{1}{2}c$
untern $2.\sin\tfrac{1}{2}(a+b).\cos\tfrac{1}{2}c$

39. Daher $1 - \text{tang}\tfrac{1}{2}A.\,\text{tang}\tfrac{1}{2}B$
$= (2.\cos\tfrac{1}{2}(a+b).\sin\tfrac{1}{2}c) : \sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)$
$1 + \text{tang}\tfrac{1}{2}A.\,\text{tang}\tfrac{1}{2}B =$
$(2.\sin\tfrac{1}{2}(a+b).\cos\tfrac{1}{2}c) : \sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)$

40 Folglich (Trig. 19. S.

$$\text{tang}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{tang}\tfrac{1}{2}C.\,\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tang}(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{tang}\tfrac{1}{2}C.\,\sin\tfrac{1}{2}(a+b)}$$

41. Aus $\cot\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{tang}\tfrac{1}{2}C.\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}$

läßt sich herleiten daß in jedem Dreyecke die drey Winkel zusammen, mehr als 180° ausmachen, durch folgende Betrachtungen

42. Keine Seite ist über 180° (Sph. Tr. 1.

Erkl.

Erkl. 6. Zus.) also ist keiner Seite Hälfte über 90° und dieser Hälfte Cosinus und Tangente sind bejaht.

Auch ist der Unterschied von zwo Seiten allemahl kleiner als 180°, und daher der Cosinus dieses halben Unterschiedes allemahl bejaht. Also $\cos\frac{1}{2}(a-b)$ bejaht.

Endlich kein Winkel über 180° also $\text{tang}\frac{1}{2}C$ bejaht.

43. **Erster Fall** Es sey $a+b<180$ also $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b<90$ und $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ bejaht. So ist gewiß $\frac{1}{2}(a-b)<\frac{1}{2}(a+b)$ und $\cos\frac{1}{2}(a-b)>\cos\frac{1}{2}(a+b)$. Dieser beyden Cosinusse Quotient in (41) ist also ein bejahter Bruch kleiner als 1; folglich $\cot\frac{1}{2}(A+B)$ bejaht und kleiner als $\text{tang}\frac{1}{2}C$, das ist $90°-\frac{1}{2}(A+B)<\frac{1}{2}C$ oder
$180°<A+B+C$

Zweyter Fall $a+b=180°$ giebt $\cot\frac{1}{2}(A+B)=0$ also $A+B=180°$ folglich die Summe aller drey Winkel gröſſer.

Dritter Fall $a+b>180°$ giebt $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ verneint, also da in (41) sonst alles rechter Hand bejaht ist (42) $\cot\frac{1}{2}(A+B)$ verneint, also $A+B>180°$ und noch vielmehr die Summe aller drey Winkel.

44. Im vorhergehenden liegt auch der Satz: **Die Summe zweener Winkel, ist unter oder über 180° nachdem die Summe der beyden ihnen gegenüber stehenden Seiten unter oder über 180° ist. Ist eine Summe = 180° so ist es auch die andere.**

Die

Die Verwandlung eines Dreyecks ABC; in eines dessen Spitzen die Pole der drey Seiten von jenem sind.

Taf. 45. Man verlängere 4 Fig AC, AB, in ACH = ABG = 90° und lege durch HG einen größten Kreis, der auf beyden senkrecht steht und beyder Pole enthält. (Geom. 52. S. 5. Z.) Wenn also in ihm GD = 90° = HE; so ist

D der Pol von AB
E AC

46. Ferner ED = GH = CAB (G. 52 S. 4. Z.)

47. Man verlängere AC bis CI = 90°

48 So ist HI = AC (47; 45)

49. Auf EI steht CI senkrecht (G. 50 S. 1. Zus.) weil E der Pol von AC ist, und da IC = 90° so ist C der Pol von EI; (G. 52 S. 2. Zus.) folglich wenn BC verlängert wird, bis er EI in K schneidet so ist CK = 90°; also KI das Maaß des Winkels KCI oder ACB (G. 52 S. 4. Zus.)

50. Und EI enthält auch den Pol von BC; (G. 52 S. 5. Zus.) also KEF = 90° genommen, ist F dieser Pol

51. Und FE = KI = ACB. (G. 52 S. 10 Zus.)

52. Weil also F, D; die Pole von BC, BA sind, so steht ein Kreis durch F, D, auf BC, BA, senkrecht. (G. 50 S. 1. Zus.) und B ist dieses Kreises Pol (G. 50 S. 3. Zus.)

53. Dieser Kreis schneide BC, in M, AB in L,

so

so sind BM, BL, Quadranten und ML = FD ist das Maaß des Winkels CBL = 180° — CBA.

54 Also FD = 180° — CBA

55. In 46; 51; 54; zeigt sich das Verhalten der Seiten des Dreyecks EFD gegen die Winkel des Dreyecks ABC.

56. Weil D des Kreises AB Pol ist so ist DG = DL = 90°, also des Winkels GDL oder FDE Maaß GL = AB, weil AG = BL = 90° (45; 53)

57. Weil E des Kreises AC Pol ist so sind EH, EI, Quadranten u. HI = AC (48) ist das Maaß des Winkels HEI = 180° — FED

58. Weil F des Kreises BC Pol ist so sind FM, FK, Quadranten, und des Winkels EFD Maaß ist MK = BC weil BM = 90° = CK (53; 49)

Bezeichnet man also jeden **innern** Winkel beyder Dreyecke mit dem Buchstaben an seiner Spitze, und jede Seite mit dem Buchstaben des innern Winkels dem sie gegenübersteht so ist

59. Für des Dreyecks DEF **Winkel**

D = c (56)
E = 180° — b (57)
F = a (58)

60. Für dieses Dreyecks Seiten

d = C (51)
e = 180° — B (54)
f = A (46)

61. Also sin D = sin c; sin E = sin b, sin F = sin a; sin d = sin C; sin e = sin B; sin f = sin A

aber

aber $\cos D = \cos c$; $\cos E = -\cos b$; $\cos F = \cos a$.
$\cos d = \cos C$; $\cos e = -\cos B$; $\cos f = \cos A$.

62. Aufg. Aus des Dreyecks ABC, drey Winkeln die Seite a zu finden.

Aufl. 63. Vermöge 59; 60; heißt dieses: Aus des Dreyecks FED drey Seiten den Winkel F, finden. Es ist also (18)

$$\cos F = \frac{\cos f - \cos d . \cos e}{\sin d . \sin e}$$

und daher nach (61)

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B . \cos C}{\sin B . \sin C}$$

64. Es ist auch nach (21)

$$\sin \tfrac{1}{2} F = \sqrt{\left(\frac{\sin \tfrac{1}{2}(f+d-e) . \sin \tfrac{1}{2}(f-d+e)}{\sin d . \sin e}\right)}$$

aber $f + d - e = A + C + B - 180°$ (60) also
$\frac{1}{2}(f + d - e) = \frac{1}{2}(A + B + C) - 90°$ und
$\sin \frac{1}{2}(f + d - e) = -\cos \frac{1}{2}(A + B + C)$, welches bejaht ist, weil $A + B + C > 180°$ (43)
Ferner $f - d + e = A - C + 180° - B$ davon die

$$\text{Hälfte} = \frac{A - C - B}{2} + 90° = 90° - \frac{B + C - A}{2}$$

und derselben Sinus $= \cos \frac{1}{2}(B + C - A)$

65. Daher

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\left(\frac{-\cos \tfrac{1}{2}(A+B+C) . \cos \tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B . \sin C}\right)}$$

66.

66. Nach (23)

$$\text{col}\tfrac{1}{2}F = \sqrt{\left(\frac{\sin\tfrac{1}{2}(d+e+f).\sin\tfrac{1}{2}(d+e-f)}{\sin d.\sin e}\right)}$$

wo $\frac{1}{2}(d+e+f) = \frac{1}{2}.(A+C-B)+90°$

$\frac{1}{2}(d+e-f) = 90° - \frac{1}{2}(A+B-C)$

67. Daher

$$\text{col}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{\text{col}\tfrac{1}{2}(A+C-B).\text{col}_2\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin B.\sin C}\right)}$$

68. Und $\text{tang}\frac{1}{2}a =$

$$\sqrt{\left(\frac{-\text{col}\tfrac{1}{2}(A+B+C).\text{col}\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{col}\tfrac{1}{2}(A-B+C).\text{col}\tfrac{1}{2}(A+B-C).}\right)}$$

69. Ich suche nun $\text{tang}\frac{1}{2}(a+b)$ und $\text{tang}\frac{1}{2}(a-b)$

70. Es ist aber $\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}.(F+180°-E)$

$= 90° - \frac{1}{2}(E-F)$ (59)

71. Daher $\text{tang}\frac{1}{2}(a+b) = \cot\frac{1}{2}(E-F)$

72. Nun ist nach (40)

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(E-F) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(e-f)}{\text{tang}\tfrac{1}{2}D.\sin\tfrac{1}{2}(e+f)}$$

$$\text{also } \cot\tfrac{1}{2}(E-F) = \frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}D.\sin\tfrac{1}{2}(e+f)}{\sin\tfrac{1}{2}(e-f)}$$

aber $\frac{1}{2}(e+f) = 90° + \frac{1}{2}(A-B)$ und

$\sin\frac{1}{2}(e+f) = \text{col}\frac{1}{2}(A-B)$

auch $\frac{1}{2}(e-f) = 90° - \frac{1}{2}(B+A)$

$$\text{also } \text{tang}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\text{col}\tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{col}\tfrac{1}{2}(B+A)}.\ \text{tang}\tfrac{1}{2}c$$

73. Ferner ist $\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}.(F-180°+E)$

$= \frac{1}{2}(F+E) - 90°$; die Tangente hievon nach

Trig. 19. S. gesucht ist $-\cot\frac{1}{2}(F+E)$

Aber nach (40) ist

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(F+E) = \frac{\text{cos}\tfrac{1}{2}(f-e)}{\text{tang}\tfrac{1}{2}\,D.\,\text{cos}\tfrac{1}{2}(f+e)}$$

Nun ist $\frac{1}{2}(f-e) = \frac{1}{2}(A+B) - 90°$; davon der Cosinus $= \sin\frac{1}{2}(A+B)$; auch $\frac{1}{2}(f+e) = \frac{1}{2}(A-B)+90°$ davon der Cosinus $= -\sin\frac{1}{2}(A-B)$

Daher $-\cot\frac{1}{2}(F+E)$ oder

$$74.\ \text{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\,\text{tang}\tfrac{1}{2}c$$

75. Aus (18) entstehen durch gehörige Verwechslung der Buchstaben (wie in 25) folgende drey Gleichungen.

I; $\cos a = \cos A.\sin b.\sin c + \cos b.\cos c$

II; $\cos b = \cos B.\sin a.\sin c + \cos a.\cos c$

III; $\cos c = \cos C.\sin a.\sin b + \cos a.\cos b.$

76. Aus (63) entstehen folgende.

I; $\cos A = \cos a.\sin B.\sin C - \cos B.\cos C$

II; $\cos B = \cos b.\sin A.\sin C - \cos A.\cos C$

III; $\cos C = \cos c.\sin A.\sin B - \cos A.\cos B$

77. In jeder Gleichung (75) kommen alle Seiten vor, und ein Winkel; In jeder (76) alle Winkel u. eine Seite. In jeder (7) zweene Winkel und zwo Seiten, wie sie einander gegenüber stehen. Da nun diese Gleichungen schon zu Auflösung sphärischer Dreyecke sind brauchbar befunden worden so ist es natürlich darauf zu fallen ob sich nicht auch solche Gleichungen finden lassen deren jede zweene Winkel und zwo Seiten enthielte, aber so daß nur

eine

eine Seite einem Winkel gegenüberstünde, die andere Seite dem andern Winkel nicht gegenüber stünde.

78. So wäre eine Gleichung beschaffen in der A, B, b, c, befindlich wären.

79. Eine solche Gleichung erhielte man aus (76) I; wenn man da C und a durch c und die übrigen Grössen die nicht C oder a sind ausdrucken könnte.

80. Mit den Sinussen geht dieß gar leicht an (7; I; III) wollte man aber aus diesen Werthen der Sinusse, die Cosinusse nach dem pythagorischen Lehrsatze ausdrucken, so nöthigte dieses Verfahren zu quadriren, und da so eine quadratische Gleichung herauskömmt, so würde man bey derselben Auflösung ungewiß seyn welcher von beyden Werthen der unbekannten Grösse eigentlich zur gegenwärtigen Absicht gehörte, und was sie alle beyde zu bedeuten hätten. Diese Rechnung, und die Untersuchung über die Werthe der unbekannten Grössen dazu sie nöthigte, erspart man sich, wenn man cos a, cos C, auf eine andere Art ohne zu quadriren aus 76 I wegzuschaffen sucht.

81. Dazu dienen nun 75 I; u. 76 III; jede enthält auser einem der beyden Cosinusse die man wegschaffen will, nur die Grössen die in der neuen Gleichung nach (78) bleiben sollen.

82. Man drucke also was in 76; I rechter Hand steht so aus, daß man statt der Cosinusse die weggehen sollen, ihre Werthe nach (81) setzt, so kömmt

$$\cos A = \sin B . \sin C . (\cos A . \sin b . \sin c + \cos b . \cos c)$$
$$- \cos B . \cos c . \sin A . \sin B$$
$$+ \cos A . \cos B^2$$

Wenn man $\cos A . \cos B^2$ auf die linke Seite bringt daß daselbst $\cos A . \sin B^2$ zu stehen kömmt und denn alles mit $\sin B$ dividirt so erhält man

$$\cos A . \sin B = \sin C . \cos A . \sin b . \sin c$$
$$+ \sin C . \cos b . \cos c$$
$$- \cos B . \cos c . \sin A$$

Hier setze man $\sin B . \sin c$ statt $\sin b . \sin C$, so kömmt

$$\cos A . \sin B = \cos A . \sin B . \sin c^2$$
$$+ \cos c . (\sin C . \cos b - \cos B . \sin A)$$

Wenn man was in $\cos A$ multiplicirt ist, auf die linke Seite zusammen bringt, und denn mit $\cos c$ dividirt so kömmt

$$\cos A . \sin B . \cos c = \sin C . \cos b - \cos B . \sin A$$

Um hieraus eine Gleichung zu machen welche die Bedingung (78) erfüllt, setze man $\frac{\sin B . \sin c}{\sin b}$ statt $\sin C$, so kömmt

$$\cos A . \sin B . \cos c = \sin B . \sin c . \cot b - \cos B . \sin A$$

welche schon dieses Begehren erfüllte.

83. Man kann diese Gleichung noch etwas einfacher einrichten, wenn man jedes ihrer Glieder mit $\cos B . \cot b$ dividirt, da kömmt

$$\cos A . \tang B . \cos c . \tang b = \tang B . \sin c - \sin A . \tang b$$

84. In dieser Gleichung sind A, B, zweene Winkel, b eine Seite die dem zweyten gegenüber steht, c eine die zwischen beyden Winkeln liegt. Nach dieser

ser Bemerkung finden folgende Verwechslungen statt

an die Stelle von	A	B	c	b
Setze man	C	A	b	a
oder	B	C	a	c

Dieß giebt nachstehende drey Gleichungen

85.

I; sinc.tangB—sinA tangb=cosc.cosA.tangB.tangb
IIsinb.tangA—sinC.tanga=cosb cosC tangA tanga
IIIsina.tangC—sinB.tangc=cosa.cosB.tangC.tangc

86. Es lassen sich noch mehr Verwechslungen machen. Man kann A, B, behalten, so bleibt c; statt b aber kann man a nehmen, so müßte die Verwechslung so geschehn

statt	A	B	c	b	in 85 I
käme	B	A	c	a	

Die neue Gleichung die man solchergestalt erhielte entstünde aus 85 I so, daß dorten c blieb, a statt b käme u. A, B, ihre Stellen verwechselten.

Eben so wird aus 85; II, eine andere, wo b bleibt, A, C, ihre Stellen verwechseln, und c statt a steht.

Und aus 85; III; eine andere, wo a bleibt B, C, ihre Stellen verwechseln und b statt c steht.

87. Die Gleichungen (7) (75) (76) (85) finden sich in einer Abhandlung Hrn. Eulers Principes de la Trigonometrie Spherique &c. in den Mem. de l'Ac. Roy. de Prusse für das Jahr 1753; sie stehen im 30 Absatze dieser Abh. 241 Seite. Hr. E. nennt sie **Eigenschaften** des sphärischen Dreyecks;

und leitet sie aus der Methode der Größten und Kleinsten her, daraus nähmlich, daß er im Vorhergehenden dieser Abhandlung, den kürzesten Weg zwischen zween Puncten auf der Kugelfläche analytisch sucht und findet es sey ein Bogen eines größten Kreises. Da sich wie Hr. E. im Folgenden seiner Abhandlung zeigt, aus ihnen aller sphärischen Dreyecke Auflösungen herleiten lassen so war es der Mühe werth zu zeigen wie sie auf den bekannten Gründen der sphärischen Trigonometrie beruhen.

88. Aufg. In einem Kugeldreyecke sind die Seiten b, c, gegeben nebst dem Winkel A den sie einschliessen. Man sucht das Uebrige.

Aufl. 89. Für die dritte Seite ist (75) I

$$\cos a = \cos A \sin b . \sin c + \cos b . \cos c$$

90. Für den Winkel B aus 85; I

$$\text{tang } B = \frac{\sin A . \text{tang } b}{\sin c - \text{tang } b . \cos c . \cos A}$$

und eben so aus 85; III; den Werth von tang C.

91. Diese Formeln sind schon brauchbar, wenn man in Rechnungen wo die Grössen nicht bestimmt sondern nur allgemein in Buchstaben ausgedruckt werden, Folgen daraus herleiten will.

92. Wollte man darnach rechnen, wo die Grössen in Zahlen gegeben sind, so liesse sich folgendes dabey beobachten

93. Wegen (89). Wenn man die Logarithmen brauchen wollte, so addirte man zusammen die drey Logarithmen von cos A, sin b, sin c, so daß man sich

von

von jedem wie er in den Tafeln steht 10 abgezogen vorstellte, oder ihre Summe um 30 verminderte. Dieses gäbe den Logarithmen eines Bruches. Und eben so die Summe der Logarithmen von col b, col c, um 20 vermindert. Der letzte Bruch zum ersten addirt gäbe col a

94. Will man aber dieses Verfahren brauchen so läßt es sich noch bequemer und schärfer so einrichten.

95. Es sey A spitzig. Man drucke die Gleichung so aus

$$\text{col a} = \text{col b.col c} + \text{sin b sin c} - (1 - \text{col A}) \text{ sin b. sin c}$$
$$= \text{col}(b - c) - (1 - \text{col A}). \text{ sin b. sin c}$$

96. A stumpf da setze man

$$\text{col a} = \text{col b.col c} - \text{sin b. sin c} + (\text{col A} + 1) \text{ sin b. sin c}$$
$$= \text{col}(b + c) + (\text{col A} + 1). \text{ sin b. sin c}$$

97. In (95) ist $1 - \text{col A}$ und in (96) $\text{col A} + 1$ eine bejahte Grösse kleiner als 1. In jedem also das Product daraus in sin b. sin c ein eigentlicher Bruch, den man durch die Logarithmen finden kann, und der mit dem Cosinus der Summe oder Differenz von b u. c; den Cosinus von a giebt.

98. Exempel $A = 43° 20'$, $b = 65° 31'$
$c = 66° 45'$

$$\frac{1 - \text{col A}}{1 - \text{col A}} = \frac{-0,7273736}{+0,2726263}$$

Wenn man nun nur die Logarithmen für Zahlen die bis 10000 gehen braucht so findet man

log (1 — cos A) = 3,4355258 — 4
log sin b = 9,9590805 — 10
log sin c = 9,9632168 — 10

Summe = 0,3578231 — 1

Diese Summe der Logarithmen gehört zu 0,2279; Wenn man nähmlich ihren ersten bejahten Theil unter der Kennzifer 3 aufsucht so gibt er die Zahl die ihm zugehört 2,279; und weil von dem bejahten Theile 1 abgezogen wird, so gehört der eigentliche Logarithme zu 0,2279

Ferner ist c — b = 1° 14', auch cos (b — c) = cos (c — b) also

cos (c — b) = + 0,9997683
— 0,2279

cos a = 0,7718

Die Zifern nach der vierten sind ungewiß und selbst diese vierte könnte 7 statt 8 seyn.

Bey dieser Ungewißheit aber wird doch die Seite zwischen 39° 29' u. 39° 28' eingeschränkt.

Das Exempel ist aus Wolfs lateinischen Elementis Sphaericorum §. 163 wo b = 65° 30' 46''; Wolf hat im 162 §. a = 39° 29'

99. Solchergestalt zeigt sich daß dieses Verfahren schon bey den ganz gemeinen Logarithmen die Seite so scharf giebt als andere gewöhnliche Regeln, die auch nur den Bogen mit Ungewißheit einer Minute angeben.

100 Braucht man Logarithmen für Zahlen bis 100000 so giebt es das gesuchte noch richtiger.

101. Euler 56 §. lehrt cosa durch Viertheile u. Hälften von sechs Cosinussen von Summen und Differenzen von A, b, c, finden, welches ich hie übergehe, weil sich da die Logarithmen nicht anbringen lassen, die Rechnung aber mit den Zahlen selbst ob man wohl nicht multiplicirt sondern nur addirt und abzieht doch mühsam genug und weil soviel Grössen müssen zusammen gerechnet werden, das Gesuchte zu finden, doch nicht eben die schärfste ist.

102. Eine andere Vorschrift E. 57. §. kömmt darauf an:

Weil (89) cosa = cos A tang b. cos b. sinc + cosb. cosc so nenne man einen Bogen u; dessen Tangente = cos A tang b; da wird

$$\cos a = \tang u . \cos b . \sin c + \cos b . \cos c = \cos b . (\sin u . \sin c + \cos u . \cos c)$$

$$\text{oder } \cos a = \frac{\cos b . \cos (c - u)}{\cos u}$$

Wenn der Winkel u genau in den Tafeln steht so ist dieses Verfahren völlig scharf, sonst aber wird es in soweit unrichtig in so fern man statt des eigentlichen u den nimmt der ihm in den Tafeln am nächsten kömmt.

103 Durch diesen Winkel u, wird auch die Formel (90) sehr bequem gemacht. Der Nenner wird

$$\sin c - \tang u . \cos c = \cos u . \sin c - \sin u . \cos c$$

; also

$$\text{tang } B = \frac{\cos u.\ \sin A.\ \text{tang } b}{\sin (c - u)}$$

Hievon aber ist der Zähler $= \cos u.\text{tang } A.\cos A.\text{tang } b$
$= \cos u.\ \text{tang } A.\ \text{tang } u$ also

$$\text{tang } B = \frac{\text{tang } A.\ \sin u}{\sin (c - u)}.$$ Darnach $\sin C = \frac{\sin c.\ \sin B}{\sin b}$

104. Aus (90) hat man auch

$$\cot B = \frac{\sin c}{\sin A.\ \text{tang } b} - \cot c.\ \cot A$$

wo sich jeder Theil durch die Logarithmen leicht berechnen, und was aus beyden zusammen entsteht sind n läßt. Man muß nur jeden Logarithmen der trigonometrischen Linien wie er in den Tafeln steht um 10 vermindern.

Uebrigens könnte hier jeder Theil eine ziemlich grosse Zahl seyn, also einen Logarithmen bekommen aus dem sich die Zahl selbst nicht sehr scharf finden liesse. Und dem ohngeachtet könnte dieser grossen Zahlen Unterschied eine kleine Zahl seyn, die man also nicht so genau fände als nöthig ist, wenn man die beyden Grössen nicht genau hätte. Daher ist diese Formel für die Logarithmen nicht so brauchbar als das (98)

105. Wenn man überlegt daß in (40) a, b, Seiten sind die den Winkeln A, B, gegenüber stehen, und C der dritte Winkel zu jenen beyden ist so verwandeln sich die dortigen Formeln so gleich in folgende

tang

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\text{col}\tfrac{1}{2}(b-c).\cot\tfrac{1}{2}A}{\text{col}\tfrac{1}{2}(b+c)}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\text{sin}\tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{siu}\tfrac{1}{2}(b+c)}.\cot\tfrac{1}{2}A$$

Aus der halben Summe und Differenz beyder Winkel findet man sie selbst.

106. Und aus jedem dieser beyden Winkel a nach (7)

107. **Aufg.** Aus zween Winkeln A, B, und der eingeschlossenen Seite c das Uebrige zu finden.

Aufl. 108. Aus (76) III; ist für den dritten Winkel $\text{col}C = \text{col}c.\text{sin}A.\text{sin}B - \text{col}A.\text{col}B$

109. Aus 85; I; für eine der beyden Seiten

$$\text{tang}\,b = \frac{\text{sin}\,c.\,\text{tang}\,B}{\text{col}\,c.\,\text{col}\,A.\,\text{tang}\,B + \text{sin}\,A}$$

110. Man sieht leicht daß sich hier alles nachahmen läßt was bey voriger Aufgabe ist gethan worden.

111. Es sey c spitzig; so ist

$$\text{col}C = \text{sin}A.\text{sin}B - \text{col}A.\,\text{col}B - (1 - \text{col}c)\,\text{sin}A.\text{sin}B$$
$$= -\text{col}(A+B) - (1 - \text{col}\,c).\,\text{sin}\,A.\,\text{sin}\,B$$

112. Oder c stumpf so ist

$$\text{col}C = -\text{sin}A.\text{sin}B - \text{col}A.\text{col}B + (1+\text{col}c).\text{sin}A.\text{sin}B$$
$$= -\text{col}(A-B) + (1+\text{col}\,c).\,\text{sin}\,A.\,\text{sin}\,B$$

113. Weil (108)

$\text{col}C = (\text{col}\,c.\,\text{tang}\,B.\,\text{sin}\,A - \text{col}\,A).\,\text{col}\,B$ so setze man $\text{col}\,c.\,\text{tang}\,B = \text{tang}\,u$; das giebt

$$\text{col}C = \text{col}B.\left(\frac{\text{sin}\,A.\,\text{sin}\,u}{\text{col}\,u} - \text{col}\,A\right) \text{ oder}$$

$\text{col}C =$

$$\text{cof}\,C = -\frac{\text{cof}\,(A+u).\,\text{cof}\,B}{\text{cof}\,u}$$

113. Und in (109) wird der Nenner $= \frac{\text{cof}\,A\ \text{sin}\,u}{\text{cof}\,u} + \text{sin}\,A = \frac{\text{sin}\,(A+u)}{\text{cof}\,u}$; der Zähler $\frac{\text{sin}\,c\ \text{tang}\,u}{\text{cof}\,c}$ also $\text{tang}\,b = \frac{\text{tang}\,c.\,\text{sin}\,u}{\text{sin}\,(A+u)}$

Darnach $\text{sin}\,a = \frac{\text{sin}\,A.\text{sin}\,\measuredangle c}{\text{sin}\,\measuredangle C}$

114. Imgleichen nach (72)

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\text{cof}\,\frac{1}{2}(B-A)}{\text{cof}\,\frac{1}{2}(B+A)}.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\text{sin}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sin}\,\frac{1}{2}(A+B)}.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c$$

woraus sich a u. b selbst geben

115. Und aus jeder dieser beyden Seiten nach (7) den Winkel C.

116. Aufg. Aus zwo Seiten a, b, und dem Winkel der einer gegenüber steht A, das Uebrige zu finden.

Aufl. 117. Zuerst ist so gleich $\text{sin}\,B = \frac{\text{sin}\,A.\,\text{sin}\,b}{\text{sin}\,a}$

118. Aber die dritte Seite und der dritte Winkel lassen sich unmittelbar aus den gegebenen Dingen nicht bequem finden. Euler 63; 64; H. giebt Formeln nach denen man mit ziemlicher Beschwer-

lich-

lichkeit rechnen würde, und doch nimmt er darinnen auch schon B als bekannt an.

Will man aber dieses thun, so geben sich viel bequemere Vorschriften.

119. Für den dritten Winkel hat man aus (40)

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{col}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{col}\tfrac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot\tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$= \frac{\text{sin}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sin}\tfrac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot\tfrac{1}{2}(A-B)$$

120. Für die dritte Seite aus (72) (73)

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}c = \frac{\text{col}\tfrac{1}{2}(B+A)}{\text{col}\tfrac{1}{2}(A-B)} \cdot \text{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$= \frac{\text{sin}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{sin}\tfrac{1}{2}(A-B)} \cdot \text{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)$$

121. Aufg. Aus zween Winkeln A, B, und der Seite a, die einem gegenübersteht das übrige zu finden.

Aufl. 122. Man hat also $\text{sin}\,b = \frac{\text{sin}\,a \cdot \text{sin}\,B}{\text{sin}\,A}$

123. Daher sind nun in diesem Dreyecke A, B, a, b, bekannt daraus man C nach 119 u. c nach 120 findet.

124. Fragen von sphärischen schiefen Dreyecken und ihre Antworten hier.

Gegeben	Gesucht	Auflösung hier
alle drey Seiten	Ein Winkel	18; 21; 23; 24;
alle drey Winkel	Eine Seite	62. u. f.
zwo S. u. ein W		
Der eingeschlossene	Die übrige Seite	89; 102; 106
	ein Winkel	90; 103; 105;
der einer S. gegenübersteht	der W. welcher der andern gegeb. S. gegenübersteht	117
	der zwischen die gegebenen S. eingeschlossen ist	119
	Die dritte Seite	120
Zween W. u. eine S.		
die eingeschlossene	der dritte W.	108
	eine S.	109
die einem gegebenen W. gegenübersteht	eine S.	
	die dem andern gegebenen W. gegenübersteht	122
	die an einem gegebenen W. anliegt	123
	der dritte W.	123

II. Capitel

Differentialformeln sphärischer Dreyecke.

1) Die Differentiale I. Abh. 87 ... 97; werden hier auch gebraucht.

2. I. Formel. Im Dreyecke A B C 5. Fig. bleiben ungeändert 5f.
ein Winkel A, und eine anliegende Seite b
Man sucht d a : d c; die Veränderungen der beyden übrigen Seiten.

Es ist $da = +\cos B . dc$

Dieß finde ich so: Aus $\cos A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c}$

mache ich $\cos A . \sin b = \frac{\cos a}{\sin c} - \cos b . \cot c$;

So ist auf der linken Seite Alles beständig, also auf der rechten differentiirt und mit $\sin c^2$ multiplicirt

$o = \sin c . d \cos a - \cos a . d \sin c - \cos b . \sin c^2 . d \cot c$

oder

$o = -\sin c . \sin a . da - \cos a . \cos c dc + \cos b . dc$

also $\sin c . \sin a \, da = (\cos b - \cos c . \cos a) . dc$

oder $da = \frac{\cos b - \cos c . \cos a}{\sin c . \sin a} . dc$ das ist

$da = \cos B . dc$

3 Aus I. Cap. 107; drucke man $\cos B$, so aus

dorten	A	B	c	C
hie	A	C	b	B

also hier

$\cos B =$

$\cos B = \cos b . \sin A . \sin C - \cos A . \cos C$
und $da = (\cos b . \sin A . \sin C - \cos A . \cos C) . de$

4. Wenn $A = 90°$ so wird
$da = \cos b . \sin C . dc$

5. Da ist aber ferner aus rechtw. III $\cos b = \frac{\cos c}{\cos c}$

und aus rechtw. I; $\sin C = \frac{\sin c}{\sin a}$ also

$\cos b . \sin C = \frac{\cos a . \sin c}{\cos c . \sin a}$ das ist $da = \frac{\tang c}{\tang a} . dc$

6. Die Art aus Betrachtung der Figur diese Sätze zu erweisen ist: Man verlängert AB daß $BD = dc$, 5. Fig. zieht den größten Kreis CD; und nimmt auf ihm $CE = CB$ so ist $DE = da$; und man findet aus der Figur diese Verhältniß.

Wenn hier $CB = 90°$ so ist BE auch ein größter Kreis, sonst nicht. Da nun ist im rechtwinklichten Dreyecke BDE allemahl, so groß auch die Seiten seyn mögen
$\sin BD : \sin DE = 1 : \sin DBE$; aber $DBE = CBD - CBE$ und $CBD = 180° - B$ wenn CBA durch B angedeutet wird, auch $CBE = 90°$ weil C des Kreises BE Pol ist also
$DBE = 180° - B - 90° = 90° - B$ und
$\sin DBE = \cos B$; hier also ist
$\sin DE = \cos B . \sin BD$; wo DE, BD, Veränderungen von a; c; seyn können, so groß man will.

7. Wenn $B = 90°$ so ist aus rechtw. III;

$\cos CD =$

$\cos CD = \cos CB . \cos BD$ also $\cos BD = \frac{\cos(a+DE)}{\cos a}$

wo BD, DE, die Aenderungen von c; a; so groß seyn können als man will

8. II. Formel Wenn eben die Dinge ungeändert bleiben, so ist $-dB = \cos a . dC$

9. Findet sich so: Aus Auflös. schiefw. Dreyecke (63) ist

$\cos b = \frac{\cos B + \cos A . \cos C}{\sin A \sin C}$ daher

$\cos b . \sin A = \frac{\cos B}{\sin C} + \cos A . \cot C$, wo linker Hand alles unveränderlich ist.

Das also differentiirt giebt

$0 = \sin C . d\cos B - \cos B . d\sin C + \sin C^2 . \cos A . d\cot C$

$0 = -\sin C . \sin B . dB - \cos B . \cos C . dC - \cos A . dC$

$\sin C . \sin B . dB = -(\cos B \cos C + \cos A) . dC$

Das ist aus Aufl. schiefw. 76 I

$-dB = \cos a . dC$

10. Man kann hier auch statt $\cos a$ seinen Werth aus Aufl. schiefw. 75 I setzen.

11. Wenn $A = 90°$ so ist $dB = -\cot B . \cot C . dC$

12. Für $B = 90°$ ist $dB = \frac{-\cos A}{\sin C} . dC$

13. III. Formel Eben das ungeändert ist

$\frac{dC}{da} = \frac{\tang B}{\sin a}$

15. Aus schiefw. 85; II ist

Bayerische Staatsbibliothek München

$\sin b.\ tang A = (\cos b.\ tang A.\ \cos C + \sin C).\ tang a$
wo linker Hand alles unveränderlich ist.
also $o = (\cos b.\ tang A.\ \cos C + \sin C).\ d\,tang\,a$
$+ tang\,a.\ (\cos b.\ tang A.\ d\cos C + d\sin C)$
oder $o = (\cos b.\ tang A.\ \cos C + \sin C).\ \frac{d\,a}{\cos a^2}$
$+ tang\,a.\ (\cos C - \cos b.\ tang A.\ \sin C).\ dC$
Folglich
$\frac{dC}{da} = \frac{\cos b.\ tang\ A.\ \cos C + \sin C}{(\cos b.\ tang A.\ \sin C - \cos C).\ \cos a^2.\ tang\,a}$
Der Zähler ist aus Aufl. schiefw. 85; II. $= \frac{\sin b.\ tang A}{tang\,a}$. also
$\frac{dC}{da} = \frac{\sin b.\ tang\ A}{(\cos b.\ tang A.\ \sin C - \cos C).\ \cos a^2\ tang\,a}$
oder $\frac{dC}{da} = \frac{\sin b.\ tang\ A}{(\cos b.\ tang A.\ \sin C - \cos C).\ \sin a^2}$

15. In dieser Formel ist aus Aufl. schiefw. 76; II;
$\cos b = \frac{\cos B + \cos A.\cos C}{\sin A.\sin C}$. also
$\cos b.\sin C.tang\,A = \frac{\cos B + \cos A.\cos C}{\cos A}$
daher $\cos b.\ tang A.\ \sin C - \cos C = \frac{\cos B}{\cos A}$ und
$\frac{dC}{da} = \frac{\sin b.\ \sin A}{\cos B.\ \sin a^2}$; Nun ist $\sin b.\ \sin A = \sin B.$

$= \sin B . \sin a$; daher

$$\frac{dC}{da} = \frac{\tang B}{\sin a}$$

16. Weil $\sin a = \frac{\sin b . \sin A}{\sin B}$ so ist

$$\frac{dC}{da} = \frac{\tang B . \sin B}{\sin b . \sin A}$$

17. Aus Aufl. schiefw. 85. I hat man

$$\tang B = \frac{\sin A . \tang b}{\sin c - \cos c . \cos A . \tang b}$$

$$= \frac{\sin A}{\sin c . \cot b - \cos c . \cos A}$$

18. Oder auch weil man

C statt A

c a

$$\text{setzen darf; } \tang B = \frac{\sin C}{\sin a . \cot b - \cos a . \cos C}$$

19. Der Werth (17) in (16) giebt,

$$\frac{dC}{da} = \frac{\sin B}{\sin b . (\sin c . \cot b - \cos c . \cos A)}$$

20. Der Werth (18) giebt

$$\frac{dC}{da} = \frac{\sin C . \sin B}{\sin b . \sin A . (\sin a . \cot b - \cos a . \cos C)}$$

und $\sin B . \sin a$ statt $\sin b . \sin A$ gesetzt

$$\frac{dC}{da} = \frac{\sin C}{\sin a . (\sin a . \cot b - \cos a . \cos C)}$$

21. Wenn $a = 90°$ so ist

$$\frac{dC}{da} = \sin C. \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} B \quad (15)$$

22. IIII. $-dB = \cot a. \operatorname{tang} B. da$

Wenn man in 8 den Werth von d C aus (13) setzt.

$-dB = \cot a. \sin B. dc$

23. V: Wenn man in 22; statt da den Werth aus (2) setzt.

24. Auch $dB = \frac{\sin b. \sin A}{\operatorname{tang} a. \sin a}. dc$

Weil $\sin B = \frac{\sin b. \sin A}{\sin a}$

25. VI. $dC = \frac{\sin B}{\sin a}. dc$

Wenn man in (13) statt da seinen Werth aus (2) setzt

26. Auch $dC = \frac{\sin b. \sin A}{\sin a^2}. dc$

Wenn man $\frac{\sin b. \sin A}{\sin a}$ statt $\sin B$ setzt

27. Auch $dC = \frac{\sin B^2}{\sin A. \sin b} \cdot dc$

Wenn man $\frac{\sin A. \sin b}{\sin B}$ statt $\sin a$ setzt.

28 Auch $dC = \frac{\sin C. \sin b}{\sin a. \sin c} \cdot dc$

Wenn

Wenn man $\frac{\sin C . \sin b}{\sin c}$ statt sin B setzt.

29. Auch $dC = \frac{\sin C^2 . \sin b}{\sin c^2 . \sin A} . dc$

Wenn man $\frac{\sin A . \sin c}{\sin C}$ statt sin a setzt.

30. Wenn $B = 90°$ so ist aus (25)

$dC = \frac{dc}{\sin a}$

31. Aber aus rechtw. II. Proport.

$\sin a = \frac{\tang c}{\tang C}$

also $dC = \frac{\tang C}{\tang c} . dc$

32. Aus 22. folgt $\frac{dB}{da} = \infty$ wenn $B = 90°$

also $\frac{da}{dB} = o$ de la Lande Astr. 3064; sagt es sey alsdenn dB und da $= o$; das kann nicht beydes zusammen seyn.

33; Wenn A, a, unveränderlich bleiben

34. So ist $dc = \frac{\tang c}{\tang C} . dC$

35. Denn $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin c}$; wo linker Hand das unveränderliche steht. Also

$0 = \sin c . \cos C . dC - \sin C . \cos c . dc$ oder

$$dc = \frac{\sin c}{\cos c} \cdot \frac{\cos C}{\sin C} \cdot dC$$

36. Wenn $A = 90°$ so ist (rechtw. II.)
$\tang c = \sin b . \tang C$; Also $dc = \sin b . dC$

37. Wenn $B = 90°$ ist eben so $\tang c = \sin a . \tang C$ daher $dc = \sin a . dC$

38. Statt

A	a	C	c	B	b
setze man A	a	B	b	C	c

39. So wird aus (34) $db = \frac{\tang b}{\tang B} . dB$

40. Aus (36) $db = \sin c . dB$

41. Und wenn $C = 90°$ aus (37) $db = \sin a . dB$

42. $dc = \frac{-\cos C}{\cos B} . db.$

43. Aus schiefw. (18) $\cos A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c}$

Der Grösse rechter Hand ihr Differential ist $= 0$; und folglich der Zähler dieses Differentials $= 0$; dieser Zähler aber ist

$0 = \sin b . \sin c . - (-\cos c . \sin b . db - \cos b . \sin c dc)$
$- \cos a . (\sin c . \cos b . db + \sin b . \cos c . dc)$
$+ \cos b . \cos c . (\sin c . \cos b . db + \sin b . \cos c . dc)$

44. Das ist

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} + \sin b^2 . \sin c . \cos c \\ - \cos a . \sin c . \cos b \\ + \cos b^2 . \sin c . \cos c \end{array} \right\} . db + \left\{ \begin{array}{l} \sin c^2 . \sin b . \cos b \\ - \cos a . \sin b . \cos c \\ + \cos c^2 . \sin b . \cos b \end{array} \right\} . dc$$

45. Folglich

sinc.(cosc-cosa.cosb)db+sinb.(cosb-cosa.cosc).dc=o

Oder

sin c. cos C. sina. sinb.db+sinb.cos B.sina.sinc.dc=o

Oder cos C. d b + cos B. d c = o

46. Aus 44; folgt

$$\left(\tfrac{1}{2}\sin 2c - \cos a.\sin c.\cos b\right) db + \left(\tfrac{1}{2}\sin 2b - \cos a.\sin b.\cos c\right) dc = o$$

47. Also die Werthe von $\frac{db}{dc}$ aus 45;46; gleichgesetzt.

$$\frac{-\cos B - \left(\tfrac{1}{2}\sin 2b - \cos a.\sin b.\cos c\right)}{\cos C} = \frac{}{\tfrac{1}{2}\sin 2c - \cos a.\sin c.\cos b}$$

$$48.\ dB = \frac{-\cos b}{\cos c} \cdot dC$$

49. Aus (39) ist

$$dB = \frac{\text{tang B}}{\text{tang b}}.db = -\frac{\text{tang B.cos B}}{\text{tang b.cos C}}.dc\ (42)$$

$$= \frac{-\text{tang B.cos B.tang c}}{\text{tang b.cos C.tang C}}.dC\ (34)$$

$$= \frac{-\sin B}{\sin C}.\frac{\sin c}{\cos c}.\frac{\cos b}{\sin b}.dC = \frac{-\cos b}{\cos c}.dC$$

50. Weil aus schiefw. (89)
cos b = cos B. sin a. sin c + cos a. cos c, so ist hier

$$\frac{\cos b}{\cos c} = \cos B.\sin a.\text{tang c} + \cos a.$$

$$51.\ dc = -\frac{\cot C.\sin c}{\cos b}.dB$$

52. Denn aus 42; 39; ist

$$dc = \frac{-\cos C \ \tan g\, b}{\cos B \ \tan g\, B} \cdot dB$$

$$= \frac{-\cos C . \sin b}{\sin B . \cos b} \ dB = \frac{-\cos C . \sin c}{\sin C . \cos b} \ dB$$

53. Man schreibe b; C; statt c; B; so ist

$$db = \frac{-\cot B . \sin b}{\cos c} \cdot dC$$

54. Wenn in 53; $A = 90°$ so ist (rechtw. II;)
$\cot B = \sin c . \cot b$ Daher in 53;

$$db = \frac{-\sin c \cot b \sin b}{\cos c} . dC = -\tan g c . \cos b . dC =$$

$-\frac{1}{2} \sin 2b \ \tan g\, C . dC$ weil aus rechtw. II; auch
$\tan g\, c = \sin b . \tan g\, C$

55. Wenn b; c; unveränderlich sind

56. Da ist $dA = \frac{da}{\sin B . \sin c} = \frac{da}{\sin C . \sin b}$

57. Denn $\cos A . \sin b . \sin c = \cos a - \cos b . \cos c$
(schiefw. 18)
also $-\sin b . \sin c . \sin A . dA = -\sin a . da$

daher $dA = \frac{\sin a}{\sin b . \sin c . \sin A} . da$

wo $\sin b . \sin A = \sin a . \sin B$

58. $da = -\tan g\, C . \sin a . dB$

59. Denn $\cos B . \sin a . \sin c = \cos b - \cos a . \cos c$
(schiefw. 75; II;)

oder $\cos B \sin a . \operatorname{tang} c = \frac{\cos b}{\cos c} - \cos a$, also nach (55)

$\operatorname{tang} c . (\cos B . \cos a . da - \sin a . \sin B . dB) = \sin a . da$ oder
$- \operatorname{tang} c . \sin a \sin B \, dB = (\sin a - \operatorname{tang} c \cos a \cos B) . da$
Was rechter Hand in da multiplicirt ist, macht (85; III)
$\frac{\operatorname{tang} c \sin B}{\operatorname{tang} C}$; also wird

$$- \operatorname{tang} c . \sin a . \sin B . dB = \frac{\operatorname{tang} c . \sin B}{\operatorname{tang} C} - da$$

oder $da = - \operatorname{tang} C . \sin a . dB$

$$60. \quad dA = \frac{- \sin a}{\cos C . \sin b} . dB$$

61 Denn aus 56; 58; ist

$$dA = \frac{- \operatorname{tang} C . \sin a . dB}{\sin B . \sin c}$$

Das was in dB multiplicirt wird, ist

$$\frac{- \sin C . \sin a}{\sin B \sin c . \cos C} = \frac{- \sin B . \sin a}{\sin B . \sin b . \cos C}$$

$$62. \quad \frac{dC}{\operatorname{tang} C} = \frac{dB}{\operatorname{tang} B}$$

63. Denn wie in (60) ist $dA = \frac{- \sin a}{\cos B . \sin c} . dC$

$$\text{also} \quad \frac{\sin a . dC}{\cos B . \sin c} = \frac{\sin a . dB}{\cos C . \sin b} \text{ oder}$$

$\cos C . \sin b . dC = \cos B . \sin c . dB$; oder

$$\frac{\sin C.\sin b.\,dC}{\tang C} = \frac{\sin B.\sin c.\,dB}{\tang B}.$$

wo $\sin C.\sin b = \sin B.\sin c$

64. Wenn zweene Winkel A, B, unveränderlich sind

55. Da ist $\cot b.\,db = \cot a.\,da$

66. Denn $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a}$; also beyde Quotienten unveränderlich, also

$\sin a.\cos b.\,db - \sin b.\cos a.\,da = 0$ oder

$\frac{\cos b}{\sin b}.\,db = \frac{\cos a}{\sin a}.\,da.$

$$67.\ dc = \frac{\sin C.\,da}{\cos b.\sin A} = \frac{\sin c.\,da}{\cos b.\sin a}$$

68. Nach schiefw. 86 wird aus das. 88

$\sin c.\tang A - \sin B.\tang a = \cos c\ \cos B.\tang A.\tang a$

also mit $\tang A.\tang a$ dividirt

$\sin c.\cot a - \sin B.\cot A = \cos c.\ \cos B$; und

$$\cot a.\cos c.\,dc - \frac{\sin c.\,da}{\sin a^2} = -\cos B.\sin c.\,dc \text{ oder}$$

$$(\cot a.\cos c + \cos B.\sin c).\,dc = \frac{\sin c.\,da}{\sin a^2} \text{ oder}$$

$$(\cos a.\cos c + \cos B.\sin c.\sin a)\,dc = \frac{\sin c.\,da}{\sin a}$$

oder (schiefw. 75; II;

$$\cos b.\,dc = \frac{\sin c.\,da}{\sin a} \text{ wo } \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

69. $dC = \sin A . \sin b . dc = \sin B \sin a . dc$

70. Denn aus schiefw. 76; 11; ist

$\cos C = \cos c \sin A . \sin B - \cos A \cos B$

also $- \sin C . dC = - \sin A . \sin B \sin c . dc$ und

$dC = \frac{\sin A . \sin B}{\sin C} . \sin c . dc$ wo $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c}$ oder

$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c}$

71 $dC = \text{tang} b \sin C . da$

Denn aus 69; 67; ist

$dC = \frac{\sin B . \sin a . \sin c}{\cos b . \sin a} . da = \frac{\sin C . \sin b}{\cos b} . da$

72 Aufg. ACB ist bey C rechtwinklicht; Fig 6 Eine Seite desselben, AC und der ihr gegenüberstehende Winkel B sind klein, man sucht den Unterschied der Hypothenuse und des Perpendikels BC; welcher alsdenn auch klein seyn wird. 6f.

Es ist nähmlich

$\sin (c - a) = \frac{1}{2} . \cot c . \sin b^2$ oder

$= \sin 2c . (\frac{1}{2} \sin B)^2$

wo man statt $\sin (c - a)$ auch $c - a$ selbst setzen darf.

73. Aus (rechtw. III) ist $\cos a . \cos b = \cos c$;

Man nimmt hie die beyden Perpendikel spitzig an, also ist es die Hypothenuse auch und grösser als jedes der beyden.

Folglich sucht man hie, wieviel sie grösser ist als BC.

74. Weil (rechtw. I) $\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$; so muß

AC

AC nicht nur an sich, sondern auch in Vergleichung mit AB und folglich mit $\frac{b}{A}C$ klein seyn, wenn B klein seyn soll.

Wäre z. E. AC = 10'' so hiesse man es an sich klein. Wenn aber zugleich AB = 20'' wäre, so wäre B = 30°

Ich rede also jezt von einem Dreyecke da die Grundlinie in Vergleichung mit der Hypothenuse, und dem Perpendikel klein ist.

75. Allemahl, wie sich auch die Seiten verhalten, ist $\sin(c - a) = \sin c . \cos a - \cos c . \sin a$.

Da drücke man nun aus (73) a durch c u. b. aus.

76 Der allgemeine Werth von

$\cos b = \sqrt{(1 - \sin b^2)}$ giebt hie, wo man den kleinen Winkel statt des Sinus setzen, und der Reihe höhere Glieder weglassen darf (An. endl. Gr. 625)

$\cos b = 1 - \frac{1}{2} b^2$ (auch nach An. Un. 296)

Daher nach (An. endl. Gr. 7) $\frac{1}{\cos b} = 1 + \frac{1}{2} b^2$

Und (73) $\cos a = \cos c . (1 + \frac{1}{2} b^2)$

Daher $\sin a = \sqrt{(\sin c^2 - \cos c^2 . b^2 . (1 + \frac{1}{4} b^2))}$

77) Läßt man die höchste Potenz von b weg und zieht alsdenn die Wurzel durch Näherung aus so ist

$$\sin a = \sin c - \frac{\cos c^2 . b^2}{2 \sin c}$$

78 Wenn man das 76; 77; gefundene, in (75) setzt und was sich aufhebt wegläßt so findet sich

$$\sin(c - a) = \frac{1}{2} b^2 . (\sin c . \cos c + \frac{\cos c^3}{\sin c})$$

Der

Der letzte Factor hievon ist $\cos c.\left(\sin c + \frac{\cos c^2}{\sin c}\right)$

$= \frac{\cos c}{\sin c}$; woraus also der erste Ausdruck in 72 folgt.

79. Allemahl ist (rechtw. III)

$\sin a . \operatorname{tang} B = \operatorname{tang} b$

Hier also, B, b, c — a statt ihrer Tangenten und Sinusse selbst gesetzt ist aus (78)

$c - a = \frac{1}{2} . (\sin a . B)^2 . \cot c$

Statt des Quadrats von $\sin a$, setzt man hie aus 77; nur das Quadrat von $\sin c$; mit Weglassung des Theils der b enthält, denn dieser Theil mit B. B multiplicirt gäbe ein Product, aus zwey kleinen Quadraten in einander das hie als unbeträchtlich angesehn wird.

So ist $c - a = \frac{1}{2} . \frac{\sin c^2 . \cos c}{\sin c} . B . B$

welches den zweyten Ausdruck (72) giebt.

80 Die Zahlen der Secunden, die auf B, b, c — a; gehen seyen N; n; m; oder es sey $B = N . e$ u. s. w.

So ist $m = \cot c . \frac{1}{2} . n . n . e$

$= \sin 2 c . \frac{1}{4} N . N . e$

81) Die Werthe von e, und den nöthigen Logarithmen stehen 1. Abh. 96.

82. So findet man m (80) wenn c gegeben ist. Wäre a gegeben, so ist offenbahr daß man rechter Hand ohne merklichen Fehler a statt c setzen darf, weil beyde wenig unterschieden sind, so kömmt

$$m = \cot a. \tfrac{1}{2} n n e$$
$$= \sin 2a. \tfrac{1}{4} N N e$$

83. Wer sich dieses unmittelbar beweisen will verfährt so:

$\cos c$ oder $\cos a. \cos b$ (73) $= \cos a. (1 - \frac{1}{2} b^2)$ (76)

Das Quadrat hievon, von 1 abgezogen und aus dem Reste die Wurzel durch Näherung wie in (77) gezogen, giebt

$$\sin c = \sin a + \frac{\cos a^2 . b^2}{2 . \sin a}$$

Und diese beyden Werthe für den Sinus u. Cosinus in (75) gesetzt findet sich (82) nach dem Verfahren in (78)

Das bisherige findet nicht statt wenn die übrigen Seiten auch klein sind.

84. Denn alles gründet sich auf die Näherung (77) und diese setzt voraus daß in dem Werthe von $\sin a$ (76) der zweyte Theil der Grösse unter dem Wurzelzeichen in Vergleichung mit dem ersten klein sey.

Ist aber c selbst klein, so kann dieser zweyte Theil dem ersten sehr nahe kommen; nie zwar ihm gleich werden, (73) aber doch ein beträchtliches Stück von ihm betragen. Also müßte man $\sin a$ mit einiger Richtigkeit zu finden, wenigstens mehr Glieder der Reihe berechnen, welches hier aber wegen des fernern Verfahrens nicht brauchbar wäre.

85. Auch nahm man an, der Unterschied des andern Perpendikels und der Hypothenuse, sey in

Vergleichung mit diesen beyden Grössen klein, und das findet nun ebenfalls nicht statt; Er kann an sich klein seyn, aber doch mit jeder dieser beyden Grössen verglichen beträchtlich; wenn man ihn also nach (80) berechnet so bringt man vielleicht nur eine geringe Menge von Secunden heraus: aber diese Menge ist ein beträchtliches Stück der Grössen deren Unterschied sie angeben soll, und giebt ihn also nicht richtig an, wenn sie nur um einige Secunden unrichtig ist, weil diese Grössen selbst nicht viel Secunden betragen.

86. Exempel; Es sey $a = 30^1$, $b = 15^1$
so ist $n = 15.60 = 900$ also
$\log n = 5,9084850$
$\log \cot a = 2,0591416$

$7,9676266$
$-5,6154551$ (81)

$\log m = 2,3521715$
giebt $m = 225$ also
$c - a = 3^1\ 45^{11}$

87) Die gemeine trigonometrische Rechnung nach $\cos c = \cos a . \cot b$; giebt $c = 33^1\ 26^{11}$, wenn man die Secunden durch Proportionaltheile findet, also $c - a = 3^1\ 26^{11}$;

88) Ob nun gleich der Unterschied zwischen diesen beyden Angaben nur 19^{11} beträgt, so verlangt man doch, auch bey grössern Winkeln als der von einem halben Grade ist nicht um den dritten Theil

einer

einer Minute ungewiß zu seyn, wenn man diese Winkel mit einiger Schärfe zu kennen wünschet.

Wie man sich verhalten könnte wenn alle drey Seiten klein sind.

89. Da ist $\cos c = 1 - \frac{1}{2} c^2$; und dieses $= \cos a . \cos b$ das ist $= (1 - \frac{1}{2} a^2) . (1 - \frac{1}{2} b^2)$ gesetzt, giebt $c^2 = a^2 + b^2 - \frac{1}{2} a^2 b^2$ wo man das letzte Glied wegläßt und so durch Ausziehung der Quadratwurzel die gesuchte Seite findet.

Es erhellt nähmlich daß in diesem Falle das sphärische Dreyeck ABC beynahe geradelinicht wird und der pythagorische Lehrsatz sich beynahe anbringen läßt.

90. In dem Exempel (86) ist $c = \sqrt{(900 + 15.15)} = \sqrt{1125}$ Minuten $= 33',541 = 33' 32'' ,46$

91. Ich würde doch dem Verfahren (89) die gemeine trigonometrische Rechnung in diesem Falle vorziehn (87) Sie an sich selbst, setzt nichts voraus, was nicht der Wahrheit völlig gemäß ist. Wenn man bey ihr Proportionaltheile anbringt so geschieht dieses erst, nachdem man durch eine vollkommen richtige Rechnung, die gesuchte Grösse zwischen ziemlich enge Gränzen; einer Minute, oder noch engere eingeschlossen hat. In dem Verfahren (89), nimmt man Bogen von mehr Minuten für gerade an. Auch ist die Ausziehung der Quadratwurzel nichts leichter als die gemeine Rechnung mit den Proportionaltheil.n.

Durch-

92 Durchzählung der Differentialformeln für Kugeldreyecke.

Unveränderlich	Verhältnisse der Differentiale
Ein Winkel A u. anliegende Seite b	der beyden übrigen Seiten da:dc(2)
	Winkel dB:dC(8)
	einer S. u. eines W.
	die aneinander anliegend dC:da(13)
	die einander gegenüberstehn dC:dc(25)
Ein Winkel A gegenüberstehende Seite a	eines W. u. der ihm gegenüberstehenden Seite dC:dc(34)
	der beyden Seiten dc:db(42)
	der beyden Winkel dB:dC(48)
Zwo Seiten, b, c;	eines W u. der anl. S. dc:dB(51)
	ihres W. u. der ihm gegenüberstehenden S. dA:da(56)
	der dritten Seite und eines ihr anl. W. da:dB(58)
	des W. den die S. einschliessen u. eines andern dA:dB(60)
	der beyden andern Winkel dC:dB(62)
Zweene Winkel A, B	der ihnen gegenüberstehenden zwo Seiten da:db(65)
	der Seite zwischen ihnen u. einer andern dc:da(67)
	des dritten W u. der ihm gegenüberst. S. dC:dc(69)
	des dritten W. u. einer anliegenden Seite dC:da(71)

Unterschied zwischen Hypoth. u. Perpend. 72.

III. Capitel

Einige Anwendungen der sphärischen Trigonometrie.

1 **Aufgabe** Aus der Rectascension und Declination, Länge und Breite zu berechnen.

7f. I. Im Dreyecke EPS; sind gegeben
EP $= \theta$ der Schiefe der Ekliptik 7 Fig
PS $= 90° - \delta$
EPS $= 180° -$ SPD, und SPD $= 90° - \alpha$
also EPS $= 90° + \alpha$
Daraus suche man ES $= 90° - \beta$ und
SEP $= 90° - \lambda$

II. Also ist, in den Formeln für schiefe Dreyecke (88)

Dorten	b	c	A	a	C
hier	θ	$90° - \delta$	$90° + \alpha$	$90° - \beta$	$90° - \lambda$

Dorten	sin A	cos A	b + c	b — c
hier	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$90° + \theta - \delta$	$\theta + \delta - 90°$

III Also aus den ersten Formeln (89) u. (90)

$$\sin\beta = -\sin\alpha \sin\theta . \cos\delta + \cos\theta . \sin\delta$$

$$\cot\lambda = \frac{\cos\alpha \cot\delta}{\sin\theta \overset{+}{-} \cot\delta . \cos\theta . \sin\alpha}$$

oder auch

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{\sin\theta . \text{tang}\,\delta \overset{+}{-} \cos\theta . \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

IIII. Oder die Logarithmen am bequemsten zu brauchen (schiefw. 105)

tang $\frac{1}{2}$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(S+E) = \frac{\text{col}\,(\frac{1}{2}(\theta+\delta)-45^\circ)}{\text{col}\,(\frac{1}{2}(\theta-\delta)+45^\circ)}.\text{tang}(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(S-E) = \frac{\text{sin}(\frac{1}{2}(\theta+\delta)-45^\circ)}{\text{sin}(\frac{1}{2}(\theta-\delta)+45^\circ)}.\text{tang}(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)$$

Hieraus hat man die Winkel E, S;
wo $E = 90^\circ - \lambda$, also $\lambda = 90^\circ - E$
Und aus den Winkeln die Seite $ES = 90^\circ - \beta$
Folgendergestalt: $\text{sin}\,EPS = \text{col}\,\alpha$ und
$\text{sin}\,E : \text{sin}\,P = \text{sin}\,PS : \text{sin}\,ES$

$$\text{also col}\,\beta = \frac{\text{col}\,\alpha.\text{col}\,\delta}{\text{sin}\,E} = \frac{\text{col}\,\alpha.\,\text{col}\,\delta}{\text{col}\,\lambda}$$

V. Wenn in (IIII) die Tangente der halben Summe verneint wird, so zeigt dieß an, diese halbe Summe betrage über 90°; wenn aber die Tangente der halben Differenz verneint wird so ist klar daß alsdenn $\text{tang}\frac{1}{2}(E-S)$ bejaht wäre, und daß dieses also nur anzeigt E sey grösser als S.

Diese Formeln lassen sich bequem brauchen bis die Rectascension 180° wird. Wird sie aber grösser, so müßte man auch θ in ihnen als verneint ansehn weil die Ekliptik alsdenn unter den Aequator geht. Um sich also hiebey nicht zu irren ist besser daß man für solche grössere Rectascension sich besondere Formeln macht.

VI. In der 8 Figur welche die dritten Quadranten des Aequators und der Ekliptik vorstellt, ist nun EPſ das Dreyeck in dem aus 8f.

$EP = \theta$; $P\text{ſ} = 90^\circ - \delta$, $EP\text{ſ} = \text{dh} = 90^\circ - \text{ah} = 270^\circ - \alpha$

die Winkel, und die dritte Seite gesucht werden.
Es ist aber PEſ = 180° — cl = 90° + al = λ — 90°
und Eſ = 90° — β

VII. Da ist wiederum

dorten	b	c	A	a	C
hier	θ	90° — δ	270° — α	90° — β	λ — 90°
dorten	sin A	cos A	cot C	cot ½ A	
hier	— cos α	— sin α	tang λ	tang (½ α — 45°)	

VIII Also aus den ersten Formeln

$$\sin\beta = -\sin\alpha\,\sin\theta.\cos\delta + \cos\theta.\sin\delta$$

$$\tan\lambda = \frac{\sin\theta.\tan\delta + \cos\theta.\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

VIIII Auch

$$\tan\tfrac{1}{2}(\ell + E) = \frac{\cos(\frac{1}{2}(\theta+\delta) - 45°)}{\cos\frac{1}{2}(\theta-\delta) + 45°}.\tan(\tfrac{1}{2}\alpha - 45°)$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(\ell - E) = \frac{\sin(\frac{1}{2}(\theta+\delta) - 45°)}{\sin(\frac{1}{2}(\theta-\delta) + 45°)}.\tan(\tfrac{1}{2}\alpha - 45°)$$

Weil nun $\sin E P\ell = -\cos\alpha$, und
$\sin E : \sin P\ell = \sin P : \sin E\ell$; so ist

$$\cos\beta = \frac{-\cos\alpha.\cos\delta}{\sin E}$$

X. Die Formel für den Sinus der Breite (III; VIII;) läßt sich auch so ausdrucken.

Es sey $\sin\alpha = 1 - \zeta$ so ist

$$\sin\beta = \cos\theta.\sin\delta - \sin\theta.\cos\delta + \zeta.\sin\theta.\cos\delta$$
$$= \sin(\delta - \theta) + \zeta.\sin\theta.\cos\delta$$

XI In dieser Formel ist $\zeta < 1$ so lange α unter 180° ist: wenn aber die Rectascension über 180° wird,

wird, würde $\zeta > 1$. Um dieses zu vermeiden, setze man für eine solche Rectascension $\sin \alpha = \zeta - 1$ wo $\zeta < 1$ so wird die Formel VIII

$$\sin \beta = \cos \theta \sin \delta + \sin \theta . \cos \delta - \zeta . \sin \theta . \cos \delta$$
$$= \sin (\delta + \theta) - \zeta . \sin \theta . \cos \delta$$

Exempel

Es sey eines Sterns Rectascension $198^\circ\ 17' = \alpha$ seine ~~Breite~~ Abw. $9^\circ\ 58'$ südlich. Dieß gilt jezo beynahe für die Kornähre der Jungfer. Ich setze $\theta = 23^\circ 28'$

$\delta = -9^\circ - 58'$ verneint, weil die Abw. südlich ist

$\theta + \delta = 13\ \ 30$

halb $\quad 6\ \ 45$

$\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ = -(38\ \ 15)$ verneint weil das Grosse vom Kleinen abgezogen wird.

$\theta - \delta = 33\ \ 26$

halb $\quad 16\ \ 43$

$\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ = 61\ \ 43$

$\frac{1}{2}\alpha - 45^\circ = 54\ \ 8$

$\log \cos (\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ) = 9,8950450$

$\log \tang (\frac{1}{2}\alpha - 45^\circ) = 10,1408659$

$20,0359109$

$\log \cos (\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ) = 9,6756245$

$\log \tang \frac{1}{2}(f + E) = 10,3602864$

Diese Tangente ist bejaht.

$\log \sin (\frac{1}{2}(\theta + \delta) - 45^\circ) = 9,7917566$

$\log \tang (\frac{1}{2}\alpha - 45^\circ) = 10,1408659$

$19,9326225$

$\log \sin\left(\frac{1}{2}(\theta - \delta) + 45^\circ\right) = 9,9447862$

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\zeta - E) = 9,9878363$

Diese Tangente ist verneint, weil der Sinus im Zähler verneint ist. Man hat also

$\frac{1}{2}(\zeta + E) = 66^\circ\ 26'\ —$

$\frac{1}{2}(E - \zeta) = 44\ \ 12\ —$

$E = 110^\circ\ 38$

$\zeta = 22\ \ 14$

$\lambda = E + 90^\circ = 200\ \ 38$

Cassini fand 1737 die Länge der Aehren $200^\circ 11' 45''$ (s. meine Astron. 124 §)

Wenn diese Länge jedes Jahr $50'',5$ wächst so ist sie um 1771; $200^\circ\ 39'\ 45''$ welches zeigt daß die geführte Rechnung wo ich Kleinigkeiten weggelassen habe, damit übereinstimmt.

Die Breite zu berechnen ist

$\alpha = 198^\circ\ 17' = 180^\circ + 18^\circ\ 17'$

$\cos \alpha = — \cos 18^\circ\ 17$

$\sin E = \sin 69^\circ\ 22'$

$\log \cos \alpha = 9,9775026$

$\log \cos \delta = 9,9933959$

$19,9708985$

$\log \sin E = 9,9712084$

$\log \cos \beta = 9,9996901$

giebt $\beta = 2^\circ\ 9' +$

In der Formel für $\sin \beta$, (VIII) sind $\sin \alpha$, und $\sin \delta$ beyde verneint, also auch $\sin \beta$; also ist die Abweichung südlich.

Hevel

Hevel in ſ. cat. fix. Prodr. Aſtr. p. 256; giebt die Breite $1^\circ 59' 55''$ Südl. führt aber an daß Ulugbeigh ſie $2^\circ 9'$ ſetzt. Dieſer Unterſchied kan alſo von kleinen Unterſchieden in der angenommenen Rectaſc. u. Decl. herrühren.

Aus VIII; wird die Breite ſo berechnet.

$\sin \alpha = -18^\circ 17'$

$\log \sin 18^\circ 17'$	$=$	$9,4965370 - 10$
$\log \cos \delta$	$=$	$9,9933959 - 10$
$\log \sin \theta$	$=$	$9,6001181 - 10$
Summe	$=$	$0,0900510 - 1$ log M
$\log \cos \theta$	$=$	$9,9625076 - 10$
$\log \sin \delta$	$=$	$9,2382349 - 10$
Summe		$0,2007425 - 1 = \log N$

Nun iſt M bejaht aber N verneint und die Zahlen zu den Logarithmen aufgeſucht

$M = +0,12304 = -\sin \alpha . \sin \theta . \cos \delta$

$+ N = -0,15876 = + \cos \theta . \sin \delta$

$\sin \beta = -0,0357200$

gehört bejaht zu einem Bogen zwiſchen $2^\circ 2'$ und $2^\circ 3'$, und zeigt alſo dieſe Breite ſüdlich an.

Nach XI; wird ſo gerechnet,

$\sin \alpha = -0,3137163$

$1,$

$\zeta = +0,6862836$

$\log \zeta$	$=$	$4,8365013 - 5$
$\log \sin \theta$	$=$	$9,6001181 - 10$
$\log \cos \delta$	$=$	$9,9933959 - 10$
Summe	$=$	$0,4300153 - 1 = \log P$

$$\delta = -9^\circ - 58$$
$$\theta = +23 + 28$$
$$\delta + \theta = +13^\circ + 30$$
$$\sin(\delta+\theta) = +0,2334454$$
$$-P = -0,26966$$
$$\sin\beta = -0,0362200$$

giebt β zwischen $2^\circ 4'$ und $2^\circ 5'$

2. Aufgabe Aus eines Sterns Länge und Breite, die Rectascension und Declination zu berechnen.

I Hie sind im Dreyecke EPS folgende Dinge gegeben: $EP = \theta$; $ES = 90^\circ - \beta$, und der eingeschlossene Winkel $SEP = 90^\circ - \lambda$

Man sucht $PS = 90^\circ - \delta$ und $EPS = 90^\circ + \alpha$

II. Also wieder in schiefw. Dreyecken (88)

dorten	b	c	A	a	C	B
hie	θ	$90^\circ - \beta$	$90^\circ - \lambda$	$90^\circ - \delta$	$90^\circ + \alpha$	S

dorten	sin A	col A	b + c	b − c	tang C
hie	$\cos\lambda$	$\sin\lambda$	$90^\circ + \theta - \beta$	$\theta + \beta - 90^\circ$	$-\cot\alpha$

III. Also aus dortigen 89; 90;

$$\sin\delta = \sin\lambda . \sin\theta \cos\beta + \cos\theta . \sin\beta$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\lambda \cot\beta}{\cot\beta . \cos\theta . \sin\lambda - \sin\theta}$$ oder

$$\tang\alpha = \cos\theta \tang\lambda - \frac{\sin\theta \tang\beta}{\cos\lambda}$$

IIII) Und in schiefw. (105)

$$\tang\tfrac{1}{2}(P+S) = \frac{\cos(\frac{1}{2}(\theta+\beta) - 45^\circ)}{\cos(\frac{1}{2}(\theta-\beta)+45^\circ)} \tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)$$

tang

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(P-S) = \frac{\sin(45^\circ - \frac{1}{2}(\theta+\beta))}{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}(\theta-\beta))} \cdot \text{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)$$

V) Ich habe den Unterschied der gesuchten Winkel durch P — S ausgedruckt weil die Figur und die Rechnung, P stumpf annimmt, daher für geringe Breiten und Längen $P > S$ seyn wird.

VI) Für $\beta + \theta = 90^\circ$ wird $P = S$

Für grössere Breiten, im ersten Quadranten der Ekliptik, $P < S$

Man sieht leicht wie sich dergleichen Sätze mehr finden lassen wenn sie brauchbar sind.

VII) Aus IIII hat man die beyden Winkel, also

$$P = 90^\circ + \alpha$$

VIII) Und $\sin P : \sin E = \sin E S : \sin P S$

also $\cos\delta = \frac{\cos\beta \cdot \cos\lambda}{\cos\alpha}$

IX) Aus III; ist die Abweichung am größten wenn die Länge $= 90^\circ$ und daher bey gegebener Breite, des Sterns größte Abweichung die Summe, der Schiefe der Ekliptik und der Breite.

3 Aufgabe Mit einem Winkelmesser der schief steht und dessen Fernrohr ihm nicht parallel ist, den gehörigen horizontalen Winkel zu finden. 9 ff.

I) A L 9 Fig sey auf dem eingetheilten Rande eines Werkzeuges das zum winkelmessen dient; desselben Mittelpunct sey K, und sein Halbmesser K A horizontal.

II) Das Werkzeug selbst mache mit dem Horizont einen Winkel = z

Diesen Winkel kan man so abbilden: wenn man sich auf dem Horizonte mit K A den Bogen A H beschrieben vorstellt so ist L A H dieser Winkel.

III) Um des Werkzeuges Mittelpunct bewege sich ein Fernrohr K S, das aber des Werkzeuges Ebene nicht parallel sey.

V) Eine Ebene durch K S senkrecht auf die Ebene des Werkzeuges, schneide dieselbe in K L.

VI) Eine verticale Ebene durch K S schneide den Horizont in K H;

VII. Bey dem gewöhnlichen Gebrauche der Winkelmesser beym Feldmessen stellt man sich bekanntermassen durch den Gegenstand nach dem man visirt und durch des Werkzeugs Mittelpunct eine Verticalfläche vor. Thut man eben das mit einem andern Gegenstande so ist der Winkel beyder Verticalflächen, der den man eigentlich durch das Werkzeug zu finden verlangt.

VIII Steht es horizontal, und ist das Fernrohr dessen man sich etwa dabey bedient seiner Ebene parallel, also auch hier horizontal so giebt sich der gesuchte Winkel vollkommen richtig auf dem Werkzeuge.

VIIII. Stünde es aber schief und doch wäre das Fernrohr seiner Ebene parallel so müßte man den Winkel dessen beyde Schenkel schief stehn auf einen hori-

horizontalen bringen welches vorhin ist gewiesen worden (I Abh. 168)

X. Stünde es zugleich schief, und das Fernrohr wäre ihm nicht parallel, so liesse sich gegenwärtige Vorstellung folgendergestalt anbringen.

XI. KA sey in der Verticalfläche durch den einen Gegenstand, KS in der durch den andern; das Fernrohr nähmlich nach diesem andern Gegenstande gerichtet.

Der Winkel den man zu wissen verlangt ist AKH.
Der welchen das Werkzeug angiebt ist AKL;

XII. Also heißt die Frage
Aus des Fernrohrs Neigung gegen die Ebene des Werkzeuges, des Werkzeuges Neigung gegen den Horizont, und dem Winkel AKL, den Winkel AKH finden.

XII) Wenn man auch KS = KA nimmt so geben sich auf der Kugelfläche die K zum Mittelpunkte hat sphärische Dreyecke ASL; ASH, die bey L, H, rechtwinklicht sind, wie die 7 Fig. vorstellt.

XI; Da ist
$AL = AKL = \lambda$
$LS = LKS = \beta$
$LAH = \varkappa$
Diese drey Dinge sind gegeben.

Folgende beyde kann man suchen
$AH = AKH = \alpha$
$HS = HKS = \delta$

Das

Das letzte wäre des Fernrohrs Neigung gegen den Horizont, die man doch eben nicht nothwendig zu wissen verlangt, sondern sich mit A H begnügen kann.

XII. Wenn A H den Aequator, und A L die Ekliptik bedeuten so heißt die Frage (XI) in astronomischen Ausdrückungen

Aus eines Sterns S, Länge A S, Breite S L; seine Rectascension A H, u. Abweichung S H zu finden.

Also darf man nur die Formeln brauchen die für diese astronomische Frage sind berechnet worden.

XIII Hr. Prof. Meister hat in der Schrift die ich I. Abh. 298 §. genannt habe §. VIII diese Aufgabe umständlich und mit vieler Einsicht untersucht.

Dritte

Dritte Abhandlung

Untersuchungen die zur sphärischen Astronomie gehören, und besonders beym Observiren anzuwenden sind.

Ueber das Kugeldreyeck in dessen Winkeln, Pol, Scheitelpunct, und Stern sind.

1. Aufg. Polhöhe, Abweichung und Höhe eines Sterns, sind bekannt man sucht daraus

I) seinen Abstand vom Mittagskreise
II) sein Azimuth
III) Den parallactischen Winkel welchen der Abweichnngskreis mit dem Scheitelkreise am Sterne macht.

2. Aufl. In der Figur sey der Kreis in dem die Puncte P, Z, A, H, K befindlich sind der Mittagskreis, P der Nordpol, Z der Scheitelpunct, A, D; die beyden Durchschnitte des Aequators mit dem Mittagskreise, H, K die beyden Durchschnitte des Horizonts mit dem Mittagskreise, O der Durchschnitt des Aequators mit dem Horizonte, ZV ein Quadrant des Scheitelkreises durch den Stern S.

3. Man

3. Man nehme an die Figur stelle die östliche Halbkugel vor, so ist O der wahre Morgen, und von dem Augenblicke an den die Figur vorstellt, bis auf den in welchem der Stern in die Mittagsfläche kömmt, muß der Winkel S P Z, von der Größe die er jezo hat bis auf O abnehmen.

4. Soll aber die Figur die Abendseite vorstellen so ist O der wahre Abend, und des Sterns Stundenkreis hat sich aus der Mittagsfläche um den Winkel S P Z fortgedreht.

5. Es sey nun
Polhöhe $RP = \varepsilon$
nordliche Abweichung $TS = \delta$
Höhe $SV = \eta$
Azimuth $PZS = \alpha$
Stundenwinkel $ZPS = \tau$
Parallactischer Winkel $PSZ = \sigma$

6. Aus dem was in (1) gegeben wird, weiß man im Dreyecke P S Z, die drey Seiten.
$PZ = 90° - \varepsilon$
$PS = 90° - \delta$
$ZS = 90° - \eta$
Und jede der drey Fragen in (1) kömmt darauf an, aus drey Seiten eines Dreyecks die Winkel zu finden.

7. Will man also die gewöhnliche Formel mit den Logarithmen zu rechnen brauchen so ist

I)

$$(\sin\tfrac{1}{2}\tau)^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(90° - \eta + \delta - \varepsilon).\sin\frac{1}{2}.(90° - \eta - \delta + \varepsilon)}{\cos\delta.\cos\varepsilon}$$

II)

II)
$$(\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^2 = \frac{\sin\tfrac{1}{2}.(90^\circ - \delta + \eta - \varepsilon).\sin\tfrac{1}{2}(90^\circ - \delta - \eta + \varepsilon)}{\cos.\eta.\cos\varepsilon}$$

III)
$$(\sin\tfrac{1}{2}\sigma)^2 = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(90^\circ - \varepsilon + \eta - \delta).\sin\tfrac{1}{2}.(90^\circ - \varepsilon - \eta + \delta)}{\cos\eta.\cos\delta}$$

8. Will man für die gegebenen Sinus die Logarithmen brauchen, wie solche in den Tafeln stehn so muß man sich erinnern daß jede der drey Grössen rechter Hand der Gleichheitszeichen mit dem Quadrate des Sinus totus zu multipliciren ist.

9. In vielen Fällen werden auch folgende Ausdrückungen brauchbar seyn, sowohl andere Schlüsse daraus herzuleiten, als zur Berechnung eines besondern Exempels, selbst mit Logarithmen:

I) $$\cos\tau = \frac{\sin\eta - \sin\varepsilon.\sin\delta}{\cos\varepsilon.\cos\delta}$$

II) $$\cos\alpha = \frac{\sin\delta - \sin\varepsilon.\sin\eta}{\cos\eta.\cos\varepsilon}$$

III) $$\cos\sigma = \frac{\sin\varepsilon - \sin\delta.\sin\eta}{\cos\delta.\cos\eta}$$

10. Für einen Stern der südliche Abweichung hat ist δ verneint. Da wird auch der Sinus und die Tangente verneint, aber der Cosinus bleibt bejaht.

11. Wollte man diese Formeln an einem Orte brauchen, wo der Südpol erhoben wäre, und deutete durch den bejahten Werth von ε; südliche Pol-

höhe an, so gehörte der bejahte Werth von δ, südlicher Abweichung, der verneinte nordlicher.

12. Unter dem Aequator wird $\varepsilon = 0$, und die Formeln werden viel einfacher, weil $PZ = 90°$

Unter dem Pole wäre $\varepsilon = 90°$ aber $\eta = \delta$; und da werden in (9) von $\cos\tau$; u. $\cos\alpha$; Zähler u. Nenner zugleich $= 0$; nähmlich Azimuth und Stundenwinkel bestimmen sich hier nicht aus einer Höhe die immer einerley bleibt. Auch wird $\cos\sigma = 1$ weil $PSZ = 0$

13. Wenn der Stern im Aequator ist so hat man

$$\cos\tau = \frac{\sin\eta}{\cos\varepsilon}$$

$$\cos\alpha = -\tan\varepsilon . \tan\eta$$

$$\cos\sigma = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\eta}$$

daher $\cos\tau . \cos\sigma = -\cos\alpha$

14. Wenn einer der Zähler in (9) verneint wird so wird der ihm zugehörige Winkel stumpf.

15. Für einen südlichen Stern (10) werden also Stundenwinkel und parallactischer nie stumpf wenn er über dem Horizonte ist, aber sein Azimuth ist es allemahl, in der Bedeutung genommen, daß es den Winkel des Scheitelkreises mit dem Quadranten ZPR des Meridians bedeutet, in dem sich der Nordpol befindet; daher ist dieses Schritelkreises Winkel mit dem südlichen Quadranten ZAH allemahl spitzig.

16. Weil ich die Untersuchung von einer beob-

achte-

achteten Höhe anfange, so denke ich jezo nicht an Sterne unter dem Horizonte. Für solche wäre η verneint.

Ein Stern im Horizonte

17 I Da ist $\eta = o$ und in (9)

$$\text{col}\,\tau = -\tan g\,\varepsilon . \tan g\,\delta$$

$$\text{col}\,\alpha = \frac{\sin \delta}{\text{col}\,\varepsilon}$$

$$\text{col}\,\sigma = \frac{\sin \varepsilon}{\text{col}\,\delta}$$

II. Der erste dieser drey Werthe giebt **den halben Tagebogen** (Astr. 102.)

Der zweyte giebt den Cosinus des Bogens um welchen der Punct des Horizonts in dem der Stern aufgeht, von Norden absteht. Ist dieser Cosinus bejaht, so geht der Stern zwischen Norden und Osten auf, und der erwähnte Werth ist der Sinus seiner nordlichen **Morgenweite** (Astr. 100)

Ist der Cosinus verneint, so zeigt dieser verneinte Werth des Sinus der Morgenweite an, daß sie südlich ist.

Man siht leicht daß dieses nur darauf ankömmt, ob des Sterns Abweichung nordlich oder südlich ist.

Eines nordlichen Sterns halber Tagebogen ist allemahl über 90 Gr. des südlichen unter 90 Gr. (10)

III. Zuweilen nimmt man das Wort halber Tagebogen in einer etwas andern Bedeutung. Um hier den Zusammenhang nicht zu unterbrechen handele ich davon unten (447.)

18. Für ein paar gleiche, aber entgegengesetzte Abweichungen sind die Cosinus der beyden halben Tagebogen gleich, aber entgegengesetzt, also machen beyde halbe Tagebogen, zusammen 180 Gr. und beyde ganze zusammen 360 Gr.

Die Zeit also, welche der eine Stern über dem Horizonte zubringt macht mit der Zeit die der andere auch über dem Horizonte zubringt 24 Stunden.

Eben so bey der Sonne, an zween Tagen da sie entgegengesetzte sonst gleiche Abweichungen hat.

Welche Sterne auf und untergehen?

19. Wenn die Weite eines nordlichen Sterns vom Pole $90° - \delta$; grösser ist als die Polhöhe $PR = s$; so kömmt er bey der Umdrehung der Sphäre gewiß unter den Horizont wofern er also aufgeht, so geht er auch unter.

Ist seine Weite vom Pole kleiner als P Z H, so bringt ihn die Umdrehung der Sphäre gewiß über den Horizont oder er gehet auf.

Das erfolgt also allemahl für einen nordlichen Stern.

Eine südliche Abweichung heisse Δ so ist der Stern der sie hat vom Nordpole $90° + \Delta$ entfernt und geht auf wenn $90° + \Delta < 180° - s$ oder seine südliche Abweichung kleiner ist als die Ergänzung der Polhöhe.

Innerhalb der Gränzen $\Delta = 90° - s$ und $\delta = 90° - s$ sind also die Abweichungen aller Sterne enthalten die auf u. untergehen.

Grössere südliche Abweichung gibt Sterne die nicht aufgehen, grössere nordliche, solche die nicht untergehen.

Wo ein Stern durch die Mittagsfläche geht

20. Für einen nordlichen Stern ist
Mittagshöhe $= 90° - \varepsilon + \delta$
Weite vom Scheitel $= \varepsilon - \delta$

Für einen südlichen
Mittagshöhe $= 90° - \varepsilon - \Delta$
W. v. Sch. $= \varepsilon + \Delta$

Diese Mittagshöhen sind von H an gerechnet.

Also giebt der Ausdruck der Mittagshöhe, mehr als 90°; wenn $\delta > \varepsilon$, und alsdenn wird die Weite vom Scheitel verneint.

Für einen solchen Stern dessen nordliche Abweichung mehr beträgt als die Polhöhe, ist die Weite vom Pole kleiner als PZ; Er geht also zwischen P und Z durch die Mittagsfläche, oder nordwärts des Scheitels; wie nordliche Sterne deren Abweichung geringer als die Polhöhe ist und alle südliche solches südwärts thun.

Vertical wird ein Stern, dessen nordliche Abweichung der Polhöhe gleich ist.

Dieß gilt auch bey einem Sterne der nicht untergeht von seinem höchsten Durchgange. Sein niedrigster, geschiht offenbahr, allemahl nordlich.

Wie sich der parallactische Winkel mit der Höhe ändert wenn Abweichung und Polhöhe ungeändert bleiben.

21. Sein Cosinus (9) ist für einen südlichen Stern allezeit bejaht (10) folglich dieser Winkel allezeit spitzig. Ferner wächst dieser bejahte Cosinus indem die Höhe wächst, weil alsdenn der Höhe Sinus wächst ihr Cosinus abnimmt. Der spitzige Winkel nimmt also ab und ist daher im Aufgange am größten.

Das alles gilt auch für einen Stern im Aequator.

22. I Für einen nordlichen Stern, sey erstlich die Abweichung kleiner als die Polhöhe; so ist auch da der Cosinus des parallactischen Winkels allemahl bejaht, also der Winkel allemahl spitzig. Der Stern geht ~~durch~~ A und Z durch die Mittagsfläche und sein parallactischer Winkel nimmt bis auf nichts ab indem der Stern in die Mittagsfläche kömmt wie erhellt wenn man sich vorstellt was dem Dreyecke PSZ wiederfährt wenn S zwischen Z u. A kömmt. Man kan also fragen ob hier der p. W. vor dem Durchgange durch die Mittagsfläche etwa ein Gröster werde? Wenn man in (9) den Werth von $\cos\delta\ \cos\sigma$ so differentiirt, daß sich nur σ und η ändern, so erhält man $-\cos\delta.\ \sin\sigma.\ d\sigma =$

$$\cos\eta\ -\sin\delta.\cos\eta.d\eta-(\sin\varepsilon-\sin\delta\ \sin\eta).-\sin\eta.\ d\eta$$

$$\cos\eta^2$$

Der Zähler hievon wird $(\sin\varepsilon.\ \sin\eta-\sin\delta).\ d\eta$

ver-

verschwindet also für $\sin \eta = \frac{\sin \delta}{\sin e}$, und für diese Höhe ist also der parallactische Winkel am größten.

II Das Azimuth ist für ihn 90° (9) oder der Stern befindet sich im ersten Scheitelkreise.

III Die Höhe welcher der größte parallactische Winkel zugehört, heisse $\varkappa$; daß $\sin \varkappa = \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon}$

IIII So ist der Cosinus des größten parallactischen Winkels $= \frac{\sin \varepsilon \cos \varkappa}{\cos \delta}$

V Für eine gegebene Abweichung nimmt $\varkappa$ ab wenn die Polhöhe wächst also wachsen mit der Polhöhe ihr Sinus und $\cos \varkappa$; also auch der Cosinus des größten parallactischen Winkels.

VI Also ist bey einerley Sternen dieser größte parallactische Winkel desto kleiner je grösser die Polhöhe ist.

VII. Nimmt man unter einerley Polhöhe, unterschiedene Sterne, so bekömmt $\varkappa$ den kleinsten Werth $= 0$; für den im Aequator (weil ich verneinte Abweichung nicht betrachte) und der größte parallactische Winkel für diesen Stern, hat $\sin \varepsilon$ zum Cosinus.

VIII. Bey einer gegebenen Polhöhe, ist der größte parallactische Winkel den ein Stern unter den (I) angenommenen Umständen haben kann der Ergänzung der Polhöhe gleich.

23. Ist des Sterns Abweichung der Polhöhe

gleich, so ist PS = PZ und der Stern geht im Scheitel durch die Mittagsfläche. Da ist also auch PSZ spitzig und = PZS

Hier kann man nicht sicher schliessen daß der größte Winkel nach (22) für $\sin \eta = 1$ sey, welchen Werth es dort bekömmt. Denn diesen Werth in dem Ausdrucke des Differentials gebraucht, werden Zähler und Nenner zugleich = o und das giebt also einen Werth, der hieraus allein unbestimmt ist, so daß man ihn auf andere Art suchen muß.

Ueberhaupt ist in diesem Falle

$\text{col}\, \sigma = \text{tang}\, \varepsilon . \frac{1 - \sin \eta}{\text{col}\, \eta}$. und da verschwinden auch Zähler und Nenner, wenn der Stern in Z kömmt. Wenn man aber nach An. Unendl. 374; für diesen Werth der Höhe, statt des Zählers und Nenners ihre Differentiale durch $d\eta$ ausgedruckt setzt so kömmt

$\text{col}\, \sigma = \text{tang}\, \varepsilon . \frac{\text{col}\, \eta}{\sin \eta}$ und das ist = o.

Also ist in Z der parallactische Winkel = 90°, und zugleich der größte für diesen Stern.

Exempel

Man könnte $1 - \sin \eta$ aus Trig. 19 S. 7. Zus. anders ausdrucken; Ich finde aber nicht daß dieses die Rechnung bequemer machen würde. Ich verfahre hie so:

Es sey $\varepsilon = 51° 32'$; $\eta = 89°$; so ziehe ich den Sinus dieser Höhe auf den Halbmesser = 1 gebracht von 1 ab, giebt $1 - \sin \eta = 0,0001522$

also

$\log(1 - \sin\eta) = 3,1824146 - 7$

$-\log\cos\eta = -8,2418553 + 10$

$\log\frac{1-\sin\eta}{\cos\eta} = -5,0594407 + 3$

$\log \text{tab tang}\,\varepsilon = +10,0999135$

$\log \text{tab}\cos\sigma = 8,0404728$

giebt $\sigma = 89° 22' +$

Für die Höhen 60 Gr. u. 30 Gr. finde ich eben so die parallactischen Winkel $70° 18'$; $46° 37'$

Dieser Stern bleibt stets über dem Horizonte. In seinem untern Durchgange durch die Mittagsfläche ist der parallactische Winkel $= 0$ und wächst von da bis an $90°$ im obern Durchgange.

24. Ist des Sterns Abweichung grösser als die Polhöhe, so geht er zwischen Pol und Scheitel durch die Mittagsfläche und da wird der parallactische Winkel in der Mittagsfläche $= 180$ Gr. folglich giebt es hier keinen größten.

Aber $\cos\sigma$ wird $= 0$ für $\sin\eta = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta}$ und für diese Höhe der parallactische Winkel $= 90$ Gr.

Eine Folgerung hieraus sehe man unten 243;

Gebrauch hievon in der Wahl der Höhen.

25. Indem sich PS um P, ZS um Z so drehen, daß Stundenwinkel und ZPS zugleich abnehmen, so rückt S in SZ fort.

Der Stundenkreis dreht sich um P gleichförmig, so daß der Stundenwinkel in gleicher Zeit gleichviel abnimmt aber Azimuth und Höhe können sich nicht in gleicher Zeit immer gleichviel ändern.

26. Man kann also suchen wie sich Höhe und Zeitbogen zusammen ändern Aus (9) erhält man durch Differentiiren

$$-\cos\varepsilon.\cos\delta.\sin\tau.d\tau = \cos\eta.d\eta \text{ oder}$$

$$\frac{-\cos\varepsilon.\cos\delta.\sin\tau}{\cos\eta}.d\tau = d\eta$$

wo man $d\tau$ immer gleich groß annehmen kann (25)

27. Nun ist $\sin\tau = \frac{\sin\sigma.\cos\eta}{\cos\varepsilon}$, aus dem Verhalten der Seiten u. gegenüberstehenden Winkel im Dreyecke PSZ;

28. Daher $-\cos\delta.\sin\sigma.d\tau = d\eta$

29. Weil also hier linker Hand nichts veränderlich ist als σ; so verhält sich die Veränderung der Höhe, wie $\sin\sigma$

30. In einer gewissen kleinen Zeit, ändert sich also die Höhe, da wo des parallactischen Winkels Sinus am größten ist, mehr als irgend anderswo, in der gleichen kleinen Zeit.

31. Das ist, die Veränderung der Höhe ist in gleicher Zeit am stärksten,

für einen Stern südwärts des Aequators
oder im Aequator, im Aufgange; (20; 21)
für einen nordlichen Stern (22)

in der Höhe deren Sinus $= \frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon}$

für einen (23) im Scheitel

für einen (24) in der Höhe deren Sinus $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta}$

32. Diese Höhen würden am sichersten seyn die Zeit aus ihnen zu bestimmen; weil sie sich in der kürzesten Zeit am stärksten ändern.

33. Wenn sich die Höhe in langer Zeit nur wenig ändert so ist ungewiß ob die Höhe die man beobachtet hat, einer gewissen Zeit, oder einer andern davon etwas unterschiedenen zugehört.

Aus einer Sonnenhöhe die Zeit zu finden.

34. Dieses scheint in 7; 9; völlig enthalten zu seyn; nur noch die Verwandelung der Bogen in Zeit, Astr. 99. gebraucht; es ist aber noch Folgendes dabey zu bedenken.

15. Man setzt die Abweichung der Sonne im Augenblicke der Beobachtung als bekannt zum voraus. Aber diese Abweichung ändert sich beständig. Jeden Mittag kann man sie beobachten, (Astron. 66.) aber nicht so leicht auser dem Mittage.

36. Wollte man also diese Veränderung der Abweichung nicht in Betrachtung ziehen, so nähme man für die Abweichung der Sonne im Augenblicke der Beobachtung, diejenige welche sie den nächsten Mittag zuvor hatte, oder den nächsten darnach; man könnte nähmlich den Mittag nehmen welcher

der

der Beobachtung am nächsten fiele, den vorhergehenden, Nachmittage, den folgenden Vormittage. Wollte man im letzten Falle die Abweichung aus eigner Beobachtung bestimmen so könnte man freylich die Zeit der vormittägigen Höhe nicht eher als nachmittage berechnen.

37. Man findet aber in astronomischen Calendern die Abweichung der Sonne jeden Mittag des Ortes für den der Calender berechnet ist, und kann sie also aus einem solchen Calender nehmen, wiederum mit der kleinen Ungewißheit daß der Ort der Beobachtung nicht zu einerley Zeit mit dem Orte des Calenders Mittag hat, daher die Abweichung am Mittage des Ortes der Beobachtung nicht völlig die ist, die der Calender angiebt.

38. Ohngefähr zu beurtheilen, wie groß diese Ungewißheit werden kann, so bemerke man daß sich die Abweichung der Sonne um die Zeiten da Tag und Nacht gleich sind am schnellsten ändert; astronomische Calender geben diese Aenderung zwischen 23 u. 24 Minuten.

39. Wollte man diese Aenderung der Abweichung in Rechnung bringen so liesse es sich so bewerkstelligen Ich will zum Exempel annehmen die Beobachtung sey vormittage angestellt worden.

40 I Die Abweichung am Mittage vor der Beobachtung sey = D; am Mittage darnach D + ζ; also sey die Abweichung in 24 ☿ (24 wahren Sonnenstunden Astr. 99.) um ζ gewachsen.

II Aus der Abweichung D+ζ berechne man den Bogen τ; der wird also nicht ganz richtig seyn weil eine kleinere Abweichung sollte zu seiner Berechnung angenommen werden.

III Man verwandle diesen Bogen in wahre Zeit nach Astr. 99; XI; so hat man, wie lange die Beobachtung vormittage angestellt wäre, wenn der Bogen völlig richtig wäre. Weil er aber nur beynahe richtig ist so hat man solches nur beynahe. Diese Zeit heisse T

IIII Nun schliesse man $24\,\text{☿} : T = \zeta : \frac{T.\zeta}{24\,\text{☿}}$

so ist das vierte Glied dieser Proportion, der Bogen, um den die Abweichung im Augenblicke der Beobachtung kleiner ist als die am nächstfolgenden Mittage.

Oder die Abweichung im Augenblicke der Beobachtung ist $\delta = D + \zeta - \frac{T}{24\,\text{☿}} . \zeta$

V. Eigentlich ist das auch nicht vollkommen richtig, weil man in der Proportion IIII; statt T die eigentliche Zeit hätte brauchen sollen und die weiß man nicht. Da sie aber von T nur wenig unterschieden seyn kann (38) so giebt es im vierten Gliede der Proportion keinen beträchtlichen Irrthum wenn man T statt ihrer braucht.

VI. Nun hätte man also ein δ das als richtig angenommen werden darf, und mit demselben, und der vorigen Höhe und Polhöhe könnte man die

Rech-

Rechnung von vorne wiederhohlen und fände ein richtiger T das nun in Zeit verwandelt die wahre Zeit gäbe.

VII. Oder, um die Rechnung nicht ganz zu wiederhohlen bediene man sich der Differentialformeln für sphärische Dreyecke folgendergestalt.

Im Dreyecke P Z S hatte man die Seite P S = 90° — (D + ζ) genommen, und darans den Winkel P berechnet. Man suche also wieviel sich dieser Winkel ändert wenn sich die genannte Seite ein wenig ändert aber die beyden andern Seiten bleiben.

Nun heissen in der hieher gehörigen Differentialformel, die veränderliche Seite a; der an ihr liegende veränderliche Winkel B, diese beyden Dinge sind also hier P S und P; und nach der Art wie in den Formeln, Winkeln und Seiten benennt werden, müssen diese Benennungen hier folgendergestalt übersetzt werden. (II Abh. 2. C. 58)

dorten	B	a	A	C	b	c
hier	τ	PS = 90° — (D + ζ)	α	σ	90° — η	90° — ε

Die dortige Formel heißt also in den jezigen Zeichen

— d (D + ζ) = — tang σ . cos (D + ζ) d τ

Hier ist nun — d (D + ζ) = $\frac{T}{24 \mathfrak{H}}$. ζ, um so viel uähmlich ist die richtigere Seite P S grösser als die in der Rechnung (II) angenommene, weil die Abweichung zur Zeit der Beobachtung um soviel kleiner ist (III)

Also

Also $\frac{-T}{24\,\mathfrak{H}} \cdot \zeta \cdot \frac{\cot \sigma}{\operatorname{col}(D+\zeta)} = d\tau$

VIII. Was linker Hand steht kann man berechnen, wenn man den parallactischen Winkel aus den (II) gegebenen Grössen berechnet hat. Nachdem es nun bejaht oder verneint ist wird es zu dem (II) gefundenen Bogen τ addirt oder a gezogen;

Oder man berechnet die dieser Verbesserung zugehörige wahre Zeit, und verbessert durch sie auf eben die Art T (III)

IX. Für den parallactischen Winkel ist

$$\sin \sigma = \frac{\operatorname{col} \varepsilon . \sin \tau}{\operatorname{col} \eta}$$

X. Ist die Abweichung der Sonne südlich, so ist D verneint, nimmt nordliche Abweichung ab, oder südliche zu so ist ζ verneint, geschiht die Beobachtung nachmittag so ist T verneint.

Einrichtung der Formel 9; I; aus dem Stundenwinkel die Höhe zu finden.

41. I. Wenn $\operatorname{col} \tau = 1 - u$; so giebt sie

$\operatorname{col}(\varepsilon - \delta) - u . \operatorname{col} \varepsilon . \operatorname{col} \delta = \sin \eta$

II. Weil eines verneinten Bogens Cosinus einerley mit des bejahten Cosinus ist, südliche Abweichung aber als verneint angesehen wird, so muß man bey solcher Abweichung den Cosinus der Summe von ihr und der Polhöhe nehmen, alles übrige bleibt.

III. Exempel. Bey der Polhöhe 51 Gr. 32 M

sey

sey die Abweichung 22 Gr. nordlich. Man verlangt die Sonnenhöhe drey Stunden vom Mittage.

Also $\tau = 45°$; $u = 0,292893$ i

$\cos\delta . \cos\varepsilon . u = 0,16893$

$\cos(\varepsilon - \delta) = 0,8700690$

$\sin\eta = 0,7011390$

giebt diese Höhe $44° 31'$

IV. Für sonst gleiche, aber südliche Abweichung, ist $\varepsilon - \delta = 73° 32'$; $\sin\eta = 0,1145275$ und $\eta = 6° 34'$

Einige Anwendungen hievon.

I. Wenn man die Mittagslinie nach (70) zieht und die Polhöhe nur ohngefähr weiß so läßt sich der Halbmesser des Kreises berechnen in dem man den Schatten zu einer gegebenen Stunde erwartet. Er ist die Cotangente der Sonnenhöhe, den Gnomon für den Sinus totus angenommen.

Dieses dient, daß man weiß wie groß die Ebene, die zur Verzeichnung der Mittagslinie dienen soll, für einen angenommenen Gnomon seyn muß, oder umgekehrt, daß man den Gnomon nach ihrer Grösse einrichten kann.

II. Ist die Mittagslinie richtig gefunden und die Polhöhe auch beobachtet worden, so liesse sich jede Stunde jeden Tages, aus dem Schatten eines Gnomons finden, nur müßte derselbe für alle Tage berechnet werden, weil die Sonne zu eben der Stunde ein anderes Azimuth, und eine andere Höhe hat.

Der-

Dergleichen Sonnenuhr heißt eine Azimuthaluhr. Hr. Lambert hat die Theorie und das Practische davon umständlich abgehandelt Beyträge zum Gebrauche der Mathematik (Berl. 1770) II. Th. 1. Abschnitt. X Anm. u. Zus. zur Gnomonik.

III. Aus eben den gegebenen Dingen läßt sich berechnen, wie lang zu einer gegebenen Stunde eines gegebenen Tages, der Schatten eines horizontalen Stiftes in einer Verticalfläche durch ihn und die Sonne ist, vmbra versa Opt. 24.

Darauf gründen sich sogenannte cylindrische Sonnenuhren, die man bey gnomonischen Schriftstellern beschrieben findet. (Welpers Gnomon. III. Th. 8 Cap.)

Man zieht auch, auf einer ebenen Fläche Parallelen, jede für einen Tag, und trägt auf jede, die Schatten, die einem horizontalen Stifte, zu den unterschiedenen Stunden dieses Tages gehören. So giebt sich auch eine bewegliche Sonnenuhr, welche eigentlich die cylindrische in eine Ebene ausgebreitet ist.

Wie man auf eine unbewegliche Säule eine Sonnenuhr beschreiben müßte, hat Hr. Pingré untersucht: Memoire sur la colonne de la Halle aux bleds, et sur le cadran cylindrique, que l'on construit au haut de cette colonne. Par. 1764.

IIII. Auch ein Quadrant läßt sich so einrichten daß man gleich auf ihm die Stunde sehen kann, indem man die Höhe mit ihm nimmt.

Man s. Welpers Gnomonik a. a. O. 9. Cap. u. andere Schriftsteller. Auch Hr. Lambert a. a. O.

hat einen Sector angegeben, aus der Sonnenhöhe die Zeit zu bestimmen.

V. Man braucht zu dieser Absicht, für die gegebene Polhöhe eine Tafel der Sonnenhöhen jeder Stunde jedes Tages, oder wie genau man sonst diese Verrichtung machen will.

Statt einer solchen Tafel kann man auch geometrische Verzeichnungen brauchen, die freylich die Schärfe der Rechnung nicht ganz erreichen können.

VI. Habe ich also ein Werkzeug Höhen zu messen, und will mit demselben auch die Stunden finden, nicht eben mit astronomischer Schärfe, sondern wie man es im gemeinen Leben für zulänglich findet, so thue ich wohl am besten daß ich mir eine solche Tafel berechne, auf dem Werkzeuge nur nach der Höhe sehe, und in der Tafel nach der Zeit; anstatt daß ich mir die Mühe gebe, die Tafel in künstlichen Zügen auf das Werkzeug zu tragen.

VII. Da auch zu dieser gnomonischen Absicht, blos für die Zeit im gemeinen Leben; gewöhnlich nicht ein Quadrant in der Vollkommenheit die man jezo zu einem astronomischen fodert angewandt wird, da man sich mit einem schlechtern, ohne Fernrohr begnügt, so kann hier jeder Quadrant wie ihn ein gemeiner Feldmesser brauchen würde Höhen zu messen, selbst ein mässig gutes Astrolabium, dienen.

VIII. Mit solchen mittelmässigen Werkzeugen zum Feldmessen sind doch in jedem Lande immer unterschiedene Leute versorgt. Machte man also eine Tafel wie (V) für die Polhöhe etwa des Mittels

des

des Landes durch den Druck bekannt so wären viel Leute im Stande die Zeit so genau als man im gemeinen Leben verlangt, zu bestimmen; Uhren, zu dieser Absicht zulänglich zu berichtigen, u. d. g. Eben wie bey den Sonnenuhren, die in Ermangelung einer solchen Tafel das einzige Mittel zu einer solchen Absicht sind, kömmt es auch hie nicht darauf an die Polhöhe in der größten Schärfe zu haben. Daher wäre eine gedruckte Tafel für eine mäßige Provinz brauchbar.

VIIII Dieses Verfahren hätte in Absicht auf Bequemlichkeit und Richtigkeit Vorzüge vor den Sonnenuhren.

Es gäbe auch Uebung im Gebrauche solcher Werkzeuge die mit den astronomischen verwandt sind, könnte eine Fertigkeit geben, die mit der Zeit bey schärfern Observationen brauchbar wäre, empföhle und verbreitete astronomische Kenntnisse.

X. Wenn die Tafel (VI) nach der Zeit eingerichtet ist, so daß man z. E. die Höhe findet, die jeder ganzen Stunde zugehört, so wird freylich eine solche Höhe meistens auser den Graden Minuten halten, die ein gewöhnliches Feldmesserwerkzeug unmittelbar nicht allemahl angiebt. Da es aber doch vermuthlich halbe oft viertheils Grade angeben wird, so werden sich die Minuten leicht schätzen lassen.

Auch müßte sich eine solche Tafel nicht eben auf ganze Stunden einschränken, sondern könnte, we-

nigstens um den Mittag herum, noch kleinere Zeittheile enthalten.

XI. Ferner liesse sich ihr bequem, eine andere Tafel beyfügen welche die Zeiten angäbe, wie sie gewissen Höhen etwa von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Graden zugehörten. Diese Höhen wachsen nur bis an die größte welche die Sonne an einem Orte hat z. E. bey uns bis 62 Gr.

Wenn man also abwartete bis die Sonne eine gewisse in dieser Tafel befindliche Höhe erreichte, so wüßte man die Zeit wenigstens in Minuten und das wäre ein neues Mittel Uhren zum bürgerlichen Gebrauche, worauf ich hier allein sehe zu berichtigen.

43. Aufg. Die Rectascension der Sonne zu Mittage und eines Sterns sind gegeben; Man fragt wie lange nach diesem Mittage der Stern durch die Mittagsfläche geht.

Imgleichen, wie weit er zu einer gegebenen Zeit von der Mittagsfläche absteht.

Zf. Aufl. I. Der Kreis stelle den Aequator vor, 2 Fig. W sey der Anfang des Widders, T, S, seyen Puncte in denen Abweichungskreise zweener Sterne den Aequator schneiden; Ab; Morg; sind der wahre Abend u. wahre Morgen in der unbeweglichen Himmelskugel innerhalb der sich der Aequator dreht (Astron. 28) M sey auch in dieser Kugel das Punct des Meridians unter dem sich der Aeqnator immer dreht so daß der Punct des Aequators in der Mittagsfläche ist der sich gleich unter M befindet; So ist W Ab M der Sonne Rectascension = ß; W A b S,

oder

oder W A b T jedes die Rectascension eines Sterns, die γ heissen mag; jene grösser, diese kleiner als der Sonnen ihre.

Wie die Figur die Sache vorstellt, wäre W denselben Tag vormittage durch die Mittagsfläche gegangen. In meinen Schlüssen gründet sich nichts darauf; W könnte in der östlichen Hälfte des Aequators verzeichnet seyn, so daß die Rectascension der Sonne über 180 Gr. betrüge.

II Erster Fall; des Sterns Rectascension W A b S grösser als der Sonne ihre.

Zwischen Mittage und seinem Durchgange schiebt sich durch die Mittagsfläche der Bogen
M Morg S $= \gamma - \beta$;

Dieß geschiht in der Zeit $\frac{\gamma - \beta}{2\pi} . 24$ H, wenn 2π den ganzen Umfang des Aequators bedeutet.

Eine andere gleichgültige Formel s. unten 409

III. Zweyter Fall; des Sterns Rectascension W A b T, kleiner als der Sonne ihre

So schiebt sich vom Mittage bis er durchgeht, durch den Meridian der Bogen M Morg W A b T; diesem Bogen fehlt zum ganzen Aequator der Bogen T M, also ist dieser Bogen $2\pi - (\beta - \gamma)$

Und die Zeit die er braucht $\frac{2\pi - (\beta - \gamma)}{2\pi} . 24$ H

IIII. Die zweyte Frage, läßt sich folgendergestalt beantworten.

Vom Mittage an, bis an den Augenblick da des Sterns Abstand von der Mittagsfläche verlangt wird, habe sich der Bogen $\mu = \odot M$ des Aequators durch die Mittagsfläche geschoben. Dieser Bogen bekömmt also einen verneinten Werth, wenn von einer Zeit vormittage die Rede ist.

Also ist des Sterns Abstand vom Meridiane

V. Im ersten Falle $MS = \gamma - (\beta + \mu)$

VII Im zweyten $\Upsilon \odot M = \beta + \mu - \gamma$

VIII. Hr. de la Lande Altr. 698 I. Ausg. 1008 II. Ausg. giebt die Regel unter der letzten Gestalt (VII) auch setzt seine Figur den Stern westwärts der Mittagsfläche.

Wenn in V; $\beta + \mu > \gamma$ so wird der dortige Ausdruck verneint und zeigt also an, S liege von M nach Westen, nicht wie die Figur es annimt, nach Osten.

VIIII Der Abstand des Sterns von der Mittagsfläche heisse ζ

Man fragt wie lange nachmittage der Stern diesen Abstand hat (I–II) So ist

X) Im ersten Falle (V)

$$\mu = \gamma - \beta - \zeta$$

XI) Im zweyten (VII)

$$\mu = \zeta - (\beta - \gamma)$$

XII) Beym Gebrauche dieser Formeln, muß man sich erinnern daß der Abstand vom Meridiane, für den ersten Fall nach Osten, für den zweyten nach Westen gerechnet wird.

XIII. Befände sich also ein Stern im ersten Falle westwärts des Meridians z. E. in T, so bedeutete

ζ, nicht den kleinsten Bogen um den er absteht M T, sondern M Morg W T

XIIII. Und befände sich ein Stern im zweyten Falle ostwärts, z. E. in S so bedeutete ζ nicht M Morg S sondern M Ab S.

Exempel für den zweyten Fall.

XV. Den 1. Aug. 1772; befinde sich der Polarstern, 26° 28′ ostwärts der Mittagsfläche; wie lange ist das nach dem Mittage dieses Tages? Hier ist aus P. Hells Ephem. Secunden weggelassen

$$\beta = 132^\circ\ 2'$$
$$\gamma = 11\ 36$$
$$\beta - \gamma = 120\ 26$$

Wegen (XIIII) ist

$$\zeta = 360^\circ - 26^\circ - 28'$$
$$-(\beta - \gamma) = -120 - 26$$
$$\mu = 213^\circ\ 6'$$

giebt in Sternzeit 14 H 12, 5 M.

Wie hiebey der Abstand des Puncts o V vom Mittage gebraucht wird.

XVI. Diesen Abstand in Zeit, findet man, so wohl in der conn. des T. als in des P. Hell Ephem. angegeben. Er ist eigentlich: die Rectascension der Sonne in Graden, von 360 Gr. abgezogen, und dieser Rest in Sternzeit verwandelt.

So viel Zeit also, als dieser Abstand im Calender angegeben wird, kömmt der Anfang des unge-

bildeten Widders, oder die Frühlingsnachtgleiche nach der Sonne in die Mittagsfläche.

Hr. de la Lande erinnert in den Erläuterungen bey der C. d. T. diese Columne des Calenders, dist. de l'equinoxe ♎ du Soleil überschrieben, zeige nicht eigentlich die Zeit an wie lange nach dem Mittage dieser Punct durch die Mittagsfläche geht. Das wiederspricht aber dem vorhergehenden nicht, denn der Grund den Hr. d. l. L. anführt, ist die eigne Bewegung der Sonne. Also ist seine Meynung: diese Zeit sey nicht wahre oder mittlere Zeit. Dabey hätte er doch wohl sagen können, daß es wirklich Sternzeit ist.

Wenn der Abstand der Nachtgleiche von der Sonne, 2 Stunden angegeben wird, so kömmt sie wirklich 2 Sternstunden nach Mittage in den Meridian: aber diese sind kürzer als 2 wahre oder 2 mittlere Stunden. Und in der Bedeutung sagt Hr. d. l. L. die Nachtgleiche komme einige Secunden früher als die angegebene Zeit in den Meridian. Zwo Sternstunden, betragen 2 mittlere Stunden, weniger 20 mittlere Secunden.

XVII. Nach der Nachtgleiche kommen die Sterne, in der Ordnung wie ihre Rectascensionen wachsen, in den Meridian. Wenn also im Verzeichnisse der Fixsterne, die Rectascensionen in Sternzeit angegeben sind, so findet sich aus dem Abstande der Nachtgleiche, (XVI) wenn jeder Fixstern in den Meridian kömmt und daraus läßt sich auch finden wenn er einen gegebenen Abstand hat u. s. w.

XVIII.

XVIII. Im Exempel XV; ist aus der Conn. d. T. 1772. zu Paris

Abstand der Nachtgl. v. d. S. =	15H	11M	14S
d. 1. Aug. 1772			
Rectasc. des Polarst. für		46	
den Anf. 1770			
Wachsthum in 2 Jahren			
212 Tagen fast			26
Rectasc. d. 1. Aug. 1772		46	26
Summe des Abstandes der Nachtgleichen, und der Rectascension des Polarsterns	15H	57M	40S
so lange nach Mittage geht	.	.	
der Polarstern durch die	.	.	
Mittagsfläche.	.	.	
Davon ziehe man ab was	.	.	
dem Bogen 26° 28′ zu=	.	.	
gehört (XV)		1 46	
bleibt die in (XV) gesuchte Zeit	14	11	40

XVIIII. Der sehr geringe Unterschied der Zeit kömmt daher daß hie die Rechnung schärfer geführt worden nähmlich des Sterns Rectascension (nach unten 508) für den Tag bestimmt worden; auch war in XV. die Rectascension der Sonne nicht aufs genauste angenommen und für den Wiener Mittag, hie für den Pariser.

XX. Auserdem daß es zu gegenwätigem Exempel, und überhaupt zu den praktischen Absichten die man bey solchen Aufgaben hat gar selten nöthig ist

die Rechnung in der größten Schärfe zu führen, so zeigen auch diese Unterschiede, wie sich das Facit ändert wenn sich die gegebenen Grössen ein wenig ändern.

Rectascension der Mitte des Himmels.

XXI. Wenn in (VII) $\gamma = 0$; so ist $\beta + \mu$ der Stundenwinkel der Frühlingsnachtgleiche; oder dieses Punctes Abstand vom Meridiane, wenn nachmittage die Zeit verflossen ist, die dem Bogen μ zugehört.

Dieser Abstand aber ist zugleich die Rectascension des Punctes des Aequators der selbigen Augenblick im Meridiane ist. Der Punct des Aequators welcher im Meridiane ist, befindet sich zugleich in der Gränze der nordlichen u. südlichen Hälfte der Sphäre, und auch in der Gränze der ostlichen und westlichen.

Es ist also wohl sehr richtig von ihm gesagt: Er befinde sich **in der Mitte des Himmels.**

Und daher heißt der nur gefundene Zeitbogen: Ascensio recta medii coeli.

44. **Aufg.** Man weiß der Sonne Rectascension an einem Mittage und auch eines Sterns Rectascension u. Abweichung; Man hat des Sterns Höhe nach Mittage genommen und will daraus wissen wieviel Zeit es nach Mittage ist.

Fig. Aufl I Ich setze 1. Fig. der Stern habe sich auf der Morgenseite der Mittagsfläche befunden.

II. Aus seiner Höhe weiß man den Winkel P oder desselben Maaß den Bogen A T. (7; 9;) $= \tau$

III. Dieser Bogen zeigt in der Vorausſetzung (I) an, wie viel Zeit der Stern braucht bis er in die Mittagsfläche kömmt.

Sie iſt $\frac{\tau}{2\pi}$. 24 H

IIII. Findet alſo 43; II; ſtatt, ſo hat ſich vom Mittage bis zum Augenblicke der Beobachtung der Bogen $\gamma - \beta - \tau$ durchgeſchoben

V. Findet aber 43; III; ſtatt, ſo iſt dieſer Bogen $2\pi - (\beta - \gamma) - \tau$

VI Beyde Bogen (IIII; V; verwandelt man auf die bekannte Art in Zeit.

VII. Maaß man die Höhe auf der Weſtſeite ſo iſt τ verneint und muß alſo ſtatt des Abziehens addirt werden.

Exempel

45. Ich will es aus Hr. de la Lande Aſtr. 717 §. nehmen. Er ſetzt auf dem Meere ſey d. 8. Jul. 1761; die Höhe des Regulus 20 Gr. 6 M weſtlich beobachtet worden, unter nordlicher Polhöhe 32° 12'; des Sterns Abweichung 13° 8'. Der Stundenwinkel der ſich daraus findet iſt in Zeit verwandelt 4 H 57 M 10 S.

Dieſe Rechnung iſt völlig wie die 42; V; das was hier noch dazu kömmt berechne ich ſo;

Aus P. Hells Ephemer. 1761; Rectaſcenſionen

der

der Sonne	7 St	10 M	53 S	= β in Zeit
des Sterns	9	55	37	= γ
γ — β =	2	44	44	(44; IIII)
— τ = +	4	57	10	(44; VII)
Zeit nachmittage =	7 H	41 M	54 S	

Hr. de la L. giebt β und γ nicht einzeln an sondern nur ihren Unterschied = 2 H 42 M 52 S. daher auch seine Zeit um soviel anders herauskömmt.

Es ist begreiflich daß man die Rectascension der Sonne, für den Mittag des Orts der Beobachtung nehmen muß und das war freylich nicht der Wiener. Davon allein muß der Unterschied zwischen ihm und mir herrühren, denn des Sterns Rectascension ist für 1761; Weil aber Hr. de la L. den Ort nicht angiebt so habe ich lieber vollständig weisen wollen wie die Rechnung zu führen ist.

46. Indessen erhellt hieraus, daß dieses Verfahren ziemlich beträchtliche Fehler in Bestimmung der Zeit geben würde wenn man die Rectascension der Sonne, ohne Verbesserung aus einem Calender nähme der für einen andern Mittagskreis berechnet ist als den wo man beobachtet.

Man müßte den Unterschied beyder Mittagskreise wissen, nebst der Veränderung der Rectascension vom ersten Mittage bis zum zweyten. Da liesse sich nach der Regel Detri ohngefähr die Rectascension für den Mittag des Orts der Beobachtung finden.

Im

Im Exempel beträgt die Veränderung zwischen den Wiener Mittagen vom 8 bis 9 Jul. 4 M 5 S

Ich weiß also nicht, wie richtig dieses Verfahren auf dem Meere seyn wird, wo man seinen Meridian nicht gar zu genau weiß.

Zusammen gehörige Aenderungen der Höhe und des Zeitbogens.

47. I. Wenn man in $\not{49}$ I; differentiirt so bekömmt man

$$d\tau = \frac{-\cos\eta . d\eta}{\cos\varepsilon . \cos\delta . \sin\tau}$$

$$= \frac{-1}{\sin\sigma . \cos\delta} . d\eta$$

die letzte Formel, weil $\cos\eta : \sin\tau = \cos\varepsilon : \sin\sigma$

II. Stundenwinkel und Höhe, haben entgegengesetzte Veränderungen, wenn Eines wächst nimmt das Andere ab daher kömmt das Zeichen der verneinten Grösse.

III. Nahe am Meridian, wird des parallactischen Winkels Sinus klein, daher gehören nach der Formel, kleinen Aenderungen der Höhe da grosse Aenderungen des Stundenwinkels zu oder die Höhen ändern sich da langsam, wie sonst schon bekannt ist.

Warum man einzelne Höhen zu Bestimmung der Zeit jezo nicht so sehr braucht?

48. Wer die Zeit aus einer einzelnen Höhe berech-

rechnen will, muß erstlich seine Polhöhe ziemlich genau wissen, ferner die beobachtete Höhe durch die Refraction verbessern, wenn er die Sonne braucht derselben veränderliche Abweichung in Betrachtung ziehen (38) wenn er einen Stern braucht, eben so auf die Veränderung ihrer Rectascension sehn (46) und wenn er des Sterns Abweichung u. Rectascension etwa aus einem Verzeichnisse nähme, das viel Jahr alt wäre, so müßte er wenigstens auch die Veränderungen wissen welche diese Grössen wegen des Vorrückens der Nachtgleichen leiden, (Astr. 125) die Aenderungen wegen der allmählichen Fortpflanzung des Lichts und des Wankens der Erdare beyseite gesetzt. So einfach also an sich das Verfahren scheint: Aus einer Höhe die Zeit berechnen, so viel setzt es zum voraus, wenn man die Grössen die als gegeben angenommen werden, richtig genug haben will, daraus die Zeit, in kleinen Theilen, in Secunden, zu berechnen. Verlangt man so grosse Schärfe nicht, so kann man sich freylich Einiges in Berichtigung der gegebenen Grössen ersparen.

49. Hiebey hat dieses Verfahren so viel ich einsehe noch die Unvollkommenheit, wenn man es allein gebraucht, daß sich nicht wohl prüfen läßt ob in der Höhenmessung, oder in den Grössen die man für gegeben annahm, etwa kleine Fehler sind begangen worden welche die Zeit unrichtig geben. Denn weil sich von einem Beobachter, in einem Augenblicke nur eine Höhe nehmen läßt so läßt sich die Zeit dieses Augenblickes auch nur aus dieser einzigen Bestim-

stimmung herleiten, und man hat sonst keine Zeit womit man sie vergleichen kann um zu sehn wie richtig sie ist. Zweene Beobachter die in einem Augenblicke jeder eine Höhe nähmen, könnte einer dem andern zur Prüfung dienen, auser dem aber daß dieses weitläuftige Anstalten erfoderte, müßten auch beyde einander so gleich seyn, daß nicht etwa was aus des zweyten Beobachtung Unterschiedenes von des ersten seiner folgte, einem Fehler des zweyten zuzuschreiben wäre.

50. Ich rede hie wie man leicht siht, von dem Gebrauche einer einzelnen Höhe, ohne eine Uhr, wie es die Astronomen gemeiniglich machen mußten, ehe Hugen die Pendeluhren ihnen brauchbar einrichtete. Wenn man die Uhr hat so läßt sich die Zeit bequemer und richtiger angeben als nur aus einzelnen Höhen. Ich will also nun suchen die Vorschriften dazu aus den ersten Gründen herzuleiten.

Gebrauch der Uhren.

51. **Aufg.** Vermittelst eines Quadranten, den Gang der Uhr mit Sternzeit (Astr. 81) zu vergleichen.

Aufl. 1 Weil die Umdrehung der Himmelskugel gleichförmig angenommen wird (Astr. 82) so verstreicht ein Sterntag nicht nur zwischen zween Durchgängen eines Sterns durch die Mittagsfläche, sondern auch zwischen den beyden Augenblicken da er eine Nacht eine gewisse Höhe hat, und die folgende Nacht eben die Höhe, auf eben der Seite der Mittagsfläche wieder bekömmt.

II. Man bemerke also was die Uhr bey einer gewissen Höhe des Sterns in der ersten Nacht weiset und was sie bey eben der Höhe in der zweyten weiset, so zeigt dieses wieviel Stunden, Minuten, Secunden, der Uhr auf einen Sterntag gehen, den Gang der Uhr gleichförmig angenommen.

Exempel. Gesetzt die Uhr weise bey dieser Höhe
die erste Nacht 3 h 17 m 50 s
zweyte 3 14 29

3 21

So wäre der Sterntag oder 24 H =
24 h — (3 m 21 s) der Uhr

III. Ob aber die Uhr den Sterntag über gleichförmig geht, kann man so erfahren:

Man nehme die erste Nacht einige Zeit nach der ersten Höhe, eine andere, eben des Sterns, oder eines andern; bemerke bey derselben auch die Zeit der Uhr; nehme eben die Höhe die folgende Nacht wieder, und bemerke wieder die Zeit der Uhr; zwischen diesen beyden Höhen ist wieder ein Sterntag und also muß die Uhr für ihn eben so viel Zeit angeben als sie für den ersten angab

Als im vorigen Exempel, bey dieser Höhe in der zweyten Nacht auch 3 m 21 s weniger weisen als in der ersten.

IIII. Es ist klar daß man dieses mit mehr Höhen vornehmen und also in ein paar Nächten, sehr viel Vergleichungen der Uhr mit dem Sterntage haben kann.

V. Darf man Abweichungen von Sternen als bekannt annehmen, und weiß man seine Polhöhe, so läßt sich nach (31) finden was für eine Höhe jeden Sterns am besten dazu ist.

VI. Dieses wenigstens ohngefähr zu berechnen brauchte man auch nur Polhöhe und Abweichungen ohngefähr zu wissen; man könnte also hiezu sich mit einer Mittagslinie begnügen so wie man sie etwa nach der Sonne (Astr. 62) gezogen hätte, ohne die (Astr. 63) angedeuteten Verbesserungen.

VII. Der Quadrant dient gleichsam nur zu einem Gestelle für sein Fernrohr, dadurch sich zu versichern, daß es die zweyte Nacht wenn man den Stern in ihm sieht, eben die Lage hat wie die erste. Es ist also nicht einmahl daran was gelegen, ob der Quadrant vollkommen richtig eingetheilt ist, ob er die Höhen in kleinen Theilen giebt, denn man braucht hier eigentlich nicht zu wissen wie groß die Höhe ist, sondern nur daß sie beyde Nächte einerley ist.

VIII. Also wäre statt des Quadranten auch ein anderes Instrument brauchbar, mit dem man nur ein Fernrohr in eine gewisse Lage gegen den Horizont und allemahl, wenn man wollte, sicher in eben die Lage wieder bringen könnte, gesetzt daß man nicht eigentlich wüßte was es für einen Winkel mit dem Horizonte machte. So hätte man allemahl eben die Höhe wieder, ohne eigentlich zu wissen wie groß sie sey.

VIIII Es wäre leicht mehr als einen Entwurf von so einem Werkzeuge zu machen. In Smiths

Lehrbegr. d. Opt. 3. B. 6 Cap. 102. §. ist eins beschrieben das Cotes angegeben gleich grosse Sonnenhöhen zu nehmen, u. 103 §. noch ein anders.

X. Ich denke, wenn ein solches Werkzeug bequem und zuverläßig seyn soll, so wird es nichts wohlfeiler werden als ein Quadrant von mäßiger Vollkommenheit. Und da man diesen doch immer noch zu was mehr brauchen kann, so würde ich die Kosten lieber an ihn wenden.

52. Weil der Quadrant nur dient sein Fernrohr wieder in die bestimmte Stellung zu bringen, so erhellt, daß sich eben so was durch ein Fernrohr bewerkstelligen liesse das in einer gewissen Lage befestiget wäre. Die Zeit zwischen zween Durchgängen eines und desselben Sterns durch dieses Fernrohr, gäbe auch den Sterntag. Nur müßte man alsdenn sehr sicher seyn, daß sich die Lage des Fernrohrs nicht verrückt. Auch liesse sich alsdenn der Sterntag mit der Zeit der Uhr nur nach einem Sterne vergleichen, oder nach etlichen wenigen die etwa durch das Fernrohr gehen. Mit dem Quadranten lassen sich die Beobachtungen nach Gefallen vervielfältigen.

53 Auch ohne Fernrohr läßt sich so was ohngefähr folgendergestalt bewerkstelligen: Wenn man aus seinem Fenster die Aussicht nach einem etwas entlegenen hohen Gegenstande, einem Thurme z. E. hat, so bemerke man nach der Uhr den Augenblick, wenn ein Stern, wie ihn die tägliche Bewegung fortführt, von diesem Gegenstande verdeckt wird;

eben

eben das wiederhohle man die folgende Nacht; zwischen beyden Augenblicken wird ein Sterntag seyn.

Dieses setzt zum voraus, das Auge habe beydemahl genau einerley Lage gegen den Thurm. Es würde keine grosse Schwürigkeit seyn, sich die Lage des Auges bey der ersten Beobachtung so zu bezeichnen daß man sie die andere Nacht genau genug wieder nehmen könnte.

Ist aber der Thurm ziemlich weit entlegen so werden gegen seine Entfernung Breite und Höhe des Fensters so geringe seyn daß die Veränderungen die der Raum des Fensters dem Auge zuläßt, hier unbeträchtlich sind.

Jeder der dieses Verfahren brauchen will, wird leicht die Abmessungen des Fensters, mit der Weite des Thurms, die er weiß, oder wahrscheinlicher weise voraussetzen darf vergleichen können und daraus beurtheilen wie genau er zu dieser Absicht das Fenster für einen Punct annehmen darf.

Hr. Prof. Lowitz hat bey dem Antritte seines hiesigen Lehramtes, in einer kleinen zu Hörter 1755 gedruckten Schrift: "die richtige Verwandlung der scheinbaren Zeiten einer Pendeluhr in die wahren Sonnenzeiten, für einen Anfänger der ausübenden Sternwissenschaft" gelehrt, wo dergleichen Vorschriften vorkommen.

54. Aufg. Durch Eines vorhergehender Verfahren, ist bekannt wieviel der Sterntag in Zeit der Uhr beträgt: Man verlangt, Stunden, Minuten, Secunden der Uhr in Sternzeit zu verwandeln.

Aufl. I. Ich nenne, um mich kurz auszudrucken, Stunden, Minuten, Secunden, Tertien u. s. w.

Sternzeit	H	M	S	T
der Uhr	h	m	s	t

II. Was die Uhr innerhalb eines Sterntages weniger als 24 ihrer Stunden weist drücke ich in ihren Secunden aus; also setze ich

$$24\,h - \delta s = 24\,H$$

Im Exempel 51; II; wäre $\delta = 201$

III. Betrüge der Sterntag mehr als 24 Stunden der Uhr, so wäre δ verneint. Dieses könnte sich ereignen, wenn man die Uhr etwa nach Sternzeit gestellt hätte (Astr. 99; II) und sie zu dieser Absicht zu langsam gienge.

Gewöhnlich zeigen die Uhren ohngefähr mittlere Zeit, und da sind 24 St. der Uhr länger als der Sterntag (Astr. a. a. O.) nach diesem Verhalten habe ich die Gleichung II; eingerichtet.

IIII. Weil in der Stunde 3600; und in 24 Stunden 86400 Secunden sind, so ist $(86400 - \delta).\ s = 86400.\ S$; also

$$s = \frac{86400}{86400 - \delta}.\ S$$

V. Diese Gleichung bleibt, wenn man m, oder h statt s, und zugehörig M oder H statt S setzt, also ist auch

$$h = \frac{86400}{86400 - \delta}.\ H$$

$= H +$

$$= H + \frac{\delta}{86400 - \delta} \cdot H$$

$$= H + \frac{3600 \cdot \delta}{86400 - \delta} \cdot S$$

$$24\,\eta = 24H + \frac{86400 \cdot \delta}{86400 - \delta} \cdot S$$

V. Dieses läßt sich sehr leicht durch die Logarithmen berechnen, und in völliger Schärfe, wenn man Logarithmen hat die bis 100000 gehen.

Im Exempel ist, der Divisor = 86199; also

log 3600 = 3, 5563025
log δ = 2, 3031961

5, 8594986

log 86199 = 4, 9355022

0, 9239964

gehört zu 8, 3945

Also ist $\eta = H + 8,3945 \cdot S$

$24\,\eta = 24H + 201,468 \cdot S$

55. Ich habe die Formel so vorgetragen, wie daraus allemahl könnte gerechnet werden so groß auch δ wäre. Aber diese Zahl wird selten viel grösser seyn, als in dem nur gebrauchten Exempel, und alsdenn erhellt daß man gleich hätte können $24\,\eta = 24H + \delta \cdot S$ setzen wenn man nur ganze Secunden gesucht hätte.

Genauer zu bestimmen wie scharf dieses zutrifft,

setze man $\frac{86400.\delta}{86400-\delta} < \delta+1$; dieses giebt $\delta.(\delta+1) < 86400$, und findet also gewiß statt wenn $\delta+1 < r\ 86400$

Aber nach den Quadrattafeln fällt 86400 zwischen die Quadrate von 293,93 und von 293,94; Setzt man nun $\delta+1 = 294$ und $\delta = 293$ so ist beyder Product 86142

56. So lange also $\delta < 293$ so lange fehlt man um keine ganze Secunde Sternzeit wenn man $24\,h = 24\,H + \delta.S$ setzt.

$$\text{Das giebt also } h = H + \frac{\delta.S}{24}$$

57. Aufg. Eine Zeit die in Stunden, Minuten Secunden der Uhr gegeben ist; in Sternzeit auszudrucken.

Aufl. I. Aus (54) hat man eine Stunde der Uhr, in einer Sternstunde, und Decimaltheilen der Sternsecunde. Man verwandele die Decimaltheile die keine ganze Secunde ausmachen in Tertien, Quarten, und so weit man gehn will, so hat man also

h in H, S; T, Quart,
m in M, T, Quart
f in S, Quart,

Und nun kann man jede Zahl von h, m, f, durch den Canon der Sexagenen leicht in den ähnlichen Theilen der Sternzeit ausdrucken.

II. Im Exempel (54) ist

$$\begin{aligned} \text{ħ} &= H + 8\ S\ 23\ Tert\ 40\ Quart \\ m &= M\ \ \ 8\ T\ 23\ Qu \\ \text{ſ} &= S\ \ \ 8\ Qu \end{aligned}$$

III. Wollte man also 3 ħ 57 m 12 ſ in Sternzeit verwandeln, so wäre

3 H	= 3 H			
3. 8 S	=	24 S		
3. 23. T	=	1	9 T	
3. 40 Q	=		2	
57 M	=	57 M		
57. 8. T	=	7	36	
57. 23 Q	=		21	51 Q
12 S	=	12		
12. 8 Q	=		1	36
		3 57	45 10	27

IIII. Dieses Verfahren läßt sich noch in etwas abkürzen. Es sey nach (II)

$$\begin{aligned} \text{ħ} &= H + a.S + b.T + c.Q \\ m &= M + a.T + b.Q \\ \text{ſ} &= S + a.Q \end{aligned}$$

V. Nun habe man A.ħ + B. m + C. ſ in Sternzeit zu verwandeln, so beträgt solches

$$\begin{aligned} &A.H + B.M + C.S \\ &+ A.a.S + A.b.T + A.c.Q \\ &+ B.a.T + B.b.Q \\ &+ C.a.Q \end{aligned}$$

Man darf also von dieser Formel nur die drey untersten Zeilen berechnen, und sie zu dem addiren, was

was heraus kömmt wenn man in der gegebenen Zeit der Uhr H, M, S, statt h, m, s, geschrieben hat.

VI. Im Exempel wäre A = 3; B = 57; C = 12; also die drey untersten Zeilen

	25. S	11. T	
	7	57	51 Q
		1	36
	33	10	27
3H	57M	12	
3	57	45	10	27

wie vorhin

Sternzeit in mittlerer auszudrucken.

zu Astr. 99. I.

58. Aus $24h = 24H + 3M + 56S + 32T$ folgt $h = H + 9S + 51T + 20$. Quart

59. Wenn man hie die sechzigtheiligen Brüche in zehntheilichen ausdruckt so erhält man $h = H. 1,00273737654...$

60. Setzt man $H = x. m$; so ist

$$h = xm.\left(1 + \frac{9}{60.60} + \frac{51}{60.60.60} + \frac{20}{60.60.60.60}\right)$$

Was rechter Hand in x. m multiplicirt ist giebt zusammen einen Bruch, dessen Nenner $= 60^4$; der Zähler $= 60^4 + 9.60^2 + 51.60 + 20 = 1295480 = 649774. 20 = 324887. 2. 20$

Also ist dieser Bruch $= \frac{324887}{324000}$; weil

$60^4 = 60^2. 2. 30. 3. 20 = 324000. 2. 20$

Setzt

Sezt man also linker Hand h = 60 m so kömmt

$x = \frac{19440000}{324887}$

Diese Zahl wie ich sie in den Zugaben der zweyten Ausg. der Anfangsgr. berechnet habe ist

$= 59 + \frac{50}{60} + \frac{10}{60^2} + \frac{16}{60^3}$ oder

61; H = 59 m + 50 ſ + 10 t + 16 qua

62 In Decimalbrüchen ist x = 59, 836189;

also $\frac{x.h}{60}$ oder H = h. 0, 9972689

63 Hierauf beruht die Tafel: Bogen des Aequators in mittlere Sonnenzeit zu verwandeln. Weil nähmlich eine Sternstunde 15° giebt so betragen nach 61; und dem Canon der Seragenen

15°	=	59 m	50 ſ	10 t	16 qua	
60	=	3 h	59	20	41	4
120		7	58	41	22	8 u. ſ. w.

64. So giebt (58) eine Tafel, mittlere Zeit in Bogen des Aequators zu verwandeln. Nähmlich, aus der Tafel, Sternzeit in Bogen des Aequator zu verwandeln beträgt die dortige Sternzeit $15^{\circ}\,2^{I}\,27^{II}\,50^{III}$; So viel also beträgt eine Stunde mittlere Zeit in Bogen des Aequator, woraus sich wiederum leicht berechnen läßt was mehr mittlere Stunden, oder Theile der Stunde, in Bogen betragen.

65. Aus (61) folgt 24 H = h. 23, 934475

$= 23\,h\,56\,m\,4{,}11\,s$ wie Astr. 99; I. Dieses von 24 h abgezogen und alles zu Secunden gemacht giebt

$24\,H = 24\,h - 3\,m - 55{,}88\,s$ oder

$= 24\,h - 235\,s$

Aus Beobachtungen wie in (54) Uhrzeit in mittlere zu verwandeln.

66. Solche Beobachtungen geben also

$$24\,\eta - \delta s = 24\,h - 235\,s \quad (65);$$

Man setze $\eta = h + z$; also $s = s + \frac{1}{3600} \cdot z$ so ist

$$24\,h + 24\,z - \delta s - \frac{\delta\, z}{3600} = 24\,h - 235\,s$$

$$\text{Daher } z = \frac{3600.(\delta - 235)}{86400 - \delta} \cdot s$$

$$24\,z = \frac{86400.(\delta - 235)}{86400 - \delta} \cdot s$$

67. Wiese die Uhr beynahe Sternzeit, so wäre ohne beträchtlichen Irrthum $24\,z = (\delta - 235).\,s$

Erinnerungen wegen der Arten die Mittagslinie zu ziehen. zu Astr. (61.)

68. Ein Quadrant der sich über einem horizontalen eingetheilten Kreise um eine verticale Axe dreht heißt ein *Azimuthal* **Quadrant**. Nimmt man mit einem solchen Quadranten übereinstimmende Höhen eines Sterns, so läßt sich bey jeder der beyden zusammengehörigen Höhen auf dem eingetheil-

theilten Kreise, die Stellung des Quadranten angeben, der Winkel zwischen beyden Stellungen halbiren, und so die Mittagslinie ziehen.

69. Aber dergleichen Azimuthalquadranten, sind jezo wenig gebräuchlich. Die gewöhnlichen haben zwar zuweilen, einen solchen kleinen horizontalen Kreis, den man den Azimuthalkreis nennt, er dient aber nur, den Quadranten in eine gewisse Verticalfläche zu bringen, nicht wohl zu genauer Bestimmung der Mittagslinie.

70. Der Schatten scheint also das bequemste Mittel, zum Anfange eine Mittagslinie zu ziehen. Man bedient sich dazu nicht nur eines Stiftes, wie (Astr. 62) sondern auch eines Fadens mit einem Lothe beschwert da sich dieser von sich selbst vertical stellt, so erspart man sich dadurch Mühe in Stellung des Stiftes. Es ist leicht zu begreifen daß der Faden etwa von einem Loche herabhängen kann, durch das der Sonnenstrahl geht und so des Schattens länge begränzt. Das Loth muß sich unten etwa in eine Spitze endigen, die sich genau in der Linie des Fadens befindet, und auf den Punct des Bodens trifft von welchem des Fadens Schatten ausgeht.

71. Eine Vorrichtung wie (70) heißt ein Gnomon. Man hat dergleichen vorlängst gebraucht, die Sonnenhöhe durch den Schatten (Opt. 18) und also, so wohl die Zeit auser Mittage, als die Zeit des Mittags zu finden. Aeltere Anstalten dieser Art findet man schon in des Plinius Naturgeschich-

te II u. XXXVI. B. erwähnt worüber man einige Anmerkungen Martin Folkes in den Philos. Transact. n. 482; art. 5. antrifft, die im alten hamburg. Magazin 4. B. 78 S. übersetzt sind. Unter den neuern ist vorzüglich eine solche Anstalt zu Bononien bekannt. Egnatius Dantes hatte in der Kirche des h. Petronius, dergleichen schon um 1576 gemacht, welche aber durch Veränderungen im Baue der Kirche unbrauchbar geworden. Dominicus Cassini hat 1655. solches in eben der Kirche vollkommener bewerkstelligt. De Gnomone Meridiano Bononiensi ad D. Petron. deque observationibus Astronomicis eo instrumento ab eius constructione ad hoc tempus peractis. Auct. Eustach. Manfredio Bonon. Gymnas. ac Scient. Instit. Astronomo. Bonon. 1736. 4.

72. Eine Maschine an der eine Ebene kann horizontal gestellt und auf derselben der Schatten einer lothrechten Linie bemerkt werden, giebt also einen beweglichen Gnomon dergleichen man in viel Büchern beschrieben findet. Liebknecht Elem. Geogr. §. 77. Buots Equerre Azimuthale; in der Sammlung nützlicher Maschinen ꝛc. die bey Henning in Nürnb. herausgek. erstes Zehend, Tab. 22. Im XXV. Bande meiner Uebersetzung der Abh. der K. Schwed. Ak. d. Wiss. 154 S. befindet sich eine solche Vorrichtung, von Hr. Joh. Carl Wilken vornehmlich zu der Absicht, die Abweichung der Magnetnadel zu finden.

73. Wer bey einem solchen Gnomon, wirklich

die Längen der Schatten brauchen will, muß die Ebene um ihn herum groß genug haben, darauf den Schatten des Stiftes zu den Zeiten da es nöthig ist ganz zu bekommen. Er muß also entweder im voraus um die Jahrszeit da er die Mittagslinie ziehen will, Versuche über die Länge des Schattens anstellen, oder berechnen können wie sich diese Länge etwa ein paar Stunden vom Mittage, zur Länge des Stiftes verhält. Diese Berechnung setzt eigentlich die Kenntniß seiner Polhöhe zum voraus, und die Polhöhe läßt sich erst genau beobachten wenn man die Mittagslinie hat. Da es aber zu gegenwärtiger Berechnung zulänglich ist die Polhöhe nur ohngefähr zu wissen, so würde sich dieselbe durch Beobachtung des Polarsterns gar leicht so weit finden lassen. Er ist etwa 2 Gr. vom Pole, und wenn man nur nicht seine geringste Höhe statt der größten, oder umgekehrt nähme, und das ist leicht zu vermeiden so wird man mit einem mässigen Quadranten, die Polhöhe genauer als zu gegenwärtiger Berechnung nöthig wäre finden können. Wer aber kein Werkzeug hat Höhen der Sterne zu messen, der würde freylich sich wegen der Länge des Schattens durch Versuche helfen müssen.

74. Mit einem Quadranten der nur gut genug wäre gleich grosse Höhen, auf beyden Seiten der Mittagsfläche zu nehmen, liessen sich die Schatten so brauchen: In dem Augenblicke da die Sonne eine gewisse Höhe vormittage hatte, müßte die Lage des Schattens bemerkt werden, wozu genug ist ei-

nen

nen einzigen Punct in ihm zu bezeichnen, wenn die Stelle aus der er allezeit ausgeht, des Gnomons unterster Punct, unverändert bleibt. Hiezu findet der Beobachter leicht einen Gehülfen der solches auf ein gegebenes Zeichen verrichtet. Wird dieses nachmittage bey eben der Sonnenhöhe wiederhohlt, so hat man zwo Lagen des Schattens, die gleichen Sonnenhöhen zugehören, ohne sie aus gleichen Längen der Schatten bestimmt zu haben. Die Lage des Schattens ist schärfer zu sehen als seine Länge.

Prüfung der Mittagslinie vermittelst der Uhr.

Alles Bisherige wird nur dienen die Mittagslinie ohngefähr zu bestimmen, wenn auch die Abweichung der Sonne nicht veränderlich wäre. Man wird also die gezogene Mittagslinie prüfen müssen.

75. Wenn man mit dem Quadranten eine Nacht, zwo gleich grosse Höhen eines Sterns genommen hat und weiß was bey jeder dieser Höhen die Uhr wies, so ist klar, daß der Unterschied beyder Zeiten, halbirt und zur ersten Zeit addirt, giebt was die Uhr beym Durchgange durch die Mittagsfläche gewiesen hat.

76. Hat man also über der Mittagslinie (75) eine Verticalfläche aufgerichtet, und bemerkt, wenn der Stern durch diese Verticalfläche ging, so läßt sich beurtheilen, ob diese Verticalfläche genau die Mittagsfläche ist oder wieviel der Stern eher oder später in sie kömmt als in die Mittagsfläche. Und so liesse sich entweder die gezogene Linie verändern

bis

bis man statt ihrer genau die Mittagslinie hätte, oder, der Fehler den ihre Unrichtigkeit geven kann bestimmen.

77. Dergleichen Verticalfläche, läßt sich so aufrichten, daß man einen Faden, wie (70) genau auf die gezogene Linie herabhängen läßt und von einer Stelle dieses Fadens, bis an eine Stelle der Mittagslinie, einen andern Faden ausspannt, dieser ist die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks, dessen Perpendikel auf den lothrechten Faden, die Grundlinie auf die gezogene Mittagslinie, fällt.

Dieses Fadendreyeck, (triangulum filare) beschreibt Riccioli; Almag. Nou. Lib. V. cap. 18. n. 16. p. 355. Das Loth verordnet er kegelförmig, den lothrechten Faden durchs Oehr einer starken Nehnadel zu ziehen, und diese Nadel dnrch den Kegel nach seiner Axe zu stossen, daß sie an seiner Spitze herans kömmt. Die Absicht ist blos dadurch zu erhalten daß diese Spitze des Lothes recht vertical unter dem Faden ist. Das läßt sich auch bey andern Vorrichtungen des Lothes erhalten, erfodert aber allerdings Aufmerksamkeit.

Der Querfaden, kann in der Stelle befestiget werden, von welcher der lothrechte herabhängt.

Statt seiner dient auch ein anderer lothrechter Faden, über der Mittagslinie; beyde lothrechte Fäden geben alsdenn eine Fadenfläche.

Allerley Vorrichtungen und Gebrauch dieser Anstalt findet man in Rostens astron. Handbuche 4. Cap.

78.

78. Gewöhnlicher ist jezo ein Fernrohr mit Fäden in seinem Brennpuncte; wird dieses so gestellt daß einer dieser Fäden, sich in der Verticalfläche über der gezogenen Mittagslinie befindet so kann man nach (75) auch prüfen ob diese Verticalfläche, die eigentliche Mittagsfläche ist.

Wenn man das Fernrohr um eine horizontale Axe, in der Mittagsfläche drehen, und so in jeder Höhe befestigen kann, so läßt sich dasselbe nach unterschiedenen Sternen die durch den Meridian gehen, oder nach der Sonne an unterschiedenen Mittagen richten. Das giebt das **Fernrohr in der Mittagsfläche**, beschr. in Smiths Lehrbegr. d. Optik 3 B. 5. Cap. Instrument des passages. Die Axe kann zum Unterschiede der Axe **im** Fernrohre; eine **Queraxe** heissen.

79. Gehört das Fernrohr an einen Quadranten der immer in der Mittagsfläche unbeweglich bleiben soll so wird man diesen Quadranten an eine Mauer die in der Mittagsfläche aufgeführt ist befestigen.

Dergleichen Quadranten hat schon Tycho gebraucht Astronomiae instauratae Mechanica.

Jezo ist das Muster solcher Mauerquadranten der zu Greenwich den Smith umständlich beschreibt Lehrbegr. 3. B. 7. Cap.

Der göttingische ist jenem ähnlich, nur etwas kleiner 6 engl. Fuß im Halbmesser.

80 Zur genauern Kenntniß des Mechanischen bey Mauerquadranten, gehören ein paar Schriften,

des berühmten englischen Künstlers, John Bird, der den göttingischen Mauerquadranten, u. a. auch noch einen für Greenwich verfertiget den Smith nur wünschte (Lehrb. d. Opt. 3 B. 127. §.)
The method of dividing astronomical instruments Lond. 1767, Sold by John Nourse and Mess Mount and Page
The method of constructing mural quadrants. 1768.

81. Der Vorzug des Quadranten (80) ist daß er zugleich Mittagshöhen zu nehmen dient. Das Fernrohr (79) dient blos die Zeiten der Durchgänge durch die Mittagsfläche zu beobachten.

Wie man vermittelst der Uhr und des Quadranten findet, wieviel sich Rectascension und Abweichung der Sonne von einem Mittage zum nächsten ändern.

82. I. Ich nehme an daß man den Gang der Uhr zulänglich kennt (51...66.)

II. Man kann also wissen was die Uhr jeden Mittag gewiesen hat, hiezu sind übereinstimmende Höhen zulänglich, wenn man die Verbesserung des Mittags deren Theorie unten gegeben wird (253) dabey anbringt.

III. Oder auch die Mittagslinie; wäre solche etwas fehlerhaft, so gäbe sie keines Mittages Zeit ganz richtig, aber doch den ersten Mittag so viel zu früh oder zu spät als den zweyten; (von Mittagen die nicht gleich auf einander folgen sage ich das nicht) Also wäre die Zeit zwischen den beyden Durchgän-

gen der Sonne durch diese unrichtige Mittagslinie, doch, ohne merklichen Irrthum so groß als der wahre Tag.

IIII. Diese Zeit, mit dem Sterntage verglichen giebt wieviel die Rectascension der Sonne zwischen diesen beyden Mittagen gewachsen ist. (Astr. 98)

V. Der Unterschied beyder Mittagshöhen, giebt wieviel sich die Abweichung geändert hat.

VI. Der Quadrant könnte wegen solcher Fehler wie I. Abh. 22 u. f. angezeigt sind, jede Mittagshöhe unrichtig angeben, den Unterschied zwischen den beyden nächsten aber, zeigte er doch ohne merklichen Irrthum, weil er jede beynahe gleich viel unrichtig gäbe.

VII. Man braucht bey vielen Beobachtungen, die Grössen um welche sich Rectascension und Abweichung zwischen zween nächsten Mittagen ändern. Sie lassen sich allezeit in astronomischen Calendern nehmen; Indessen wird es nicht überflüßig seyn, hier gewiesen zu haben, wie man sie durch eigne Beobachtungen finden könne. Einem angehenden Astronomen kann dieses selbst zu einer Uebung dienen, bey der er seine Beobachtungen, mit dem was ihn die Calender lehren vergleichen kann.

Fehler in der Stellung des Fernrohrs an einem Mauerquadranten.

83. **Erstens** die Ebene des Mauerquadranten kann völlig vertical seyn, und des Fernrohrs Axe sich ihr parallel drehen: Aber diese lothrechte Ebene

kann

kann ein wenig von der Mittagsfläche abweichen, wie geschehn wird, wenn sie recht über einer Mittagslinie stünde, diese selbst aber ein wenig unrichtig wäre.

84. Zweytens, könnte diese Ebene zwar den Horizont in der richtigen Mittagslinie schneiden, aber selbst etwas wenig geneigt seyn, und deßwegen mit der Mittagsfläche einen kleinen Winkel machen.

85. Drittens könnte die Ebene des Quadranten völlig in der Mittagsfläche seyn, aber die Axe des Fernrohrs dreht sich nicht genau ihr parallel, sondern macht einen kleinen Winkel mit ihr.

86. Diese drey Fehler können zusammen vorhanden seyn; Aber jeder für sich darf nur klein seyn, wenn das Instrument durch ihn nicht allzusehr unrichtig werden soll, und es ist leicht zu erhalten, daß jeder solcher Fehler, wenn man ihn ja nicht ganz vermeiden kann, nur klein bleibt.

87. Solchergestalt wird verstattet seyn, jeden Fehler einzeln zu betrachten, als wäre er ohne die andern beyden da, zu untersuchen was er für Folgen hat und wie aus demselben zu erkennen ist wie viel er beträgt. Weis man dieses, so kann man das Werkzeug mit diesem Fehler doch brauchen, wenn man nur bey jeder Beobachtung die bekannte Grösse des Fehlers mit in Rechnung bringt.

88. Geben sich also Methoden, zu finden wie viel jeder dieser drey Fehler einzeln beträgt, so wird man diese drey einzelnen Grössen zusammen gerech-

net für die Unrichtigkeit annehmen, die aus allen drey Fehlern zusammen entsteht.

89. Dergleichen Methoden, beruhen auf nachfolgenden Untersuchungen.

Jede Höhe, durch Stundenwinkel und Mittagshöhe auszudrucken.

90. Die Mittagshöhe $= 90° - \varepsilon + \delta$ heisse μ (*)
So ist $\varepsilon = 90° + \delta - \mu$, daher
$\sin \varepsilon = \cos (\mu - \delta)$; $\cos \varepsilon = \sin (\mu - \delta)$
Also (9)
$\cos \tau . \cos \delta . \sin (\mu - \delta) + \cos (\mu - \delta) . \sin \delta = \sin \eta$

Man beobachtet einen Stern, kurz vor oder nach seinem Durchgange durch die Mittagsfläche. Wieviel ist seine Höhe von der Mittagshöhe unterschieden?

91. Es versteht sich daß man den Stundenwinkel weiß, um welchen der Stern vom Meridian abstehet. Weil dieser Stundenwinkel klein ist so ist sein Cosinus $1 - \frac{1}{2}\tau^2$
Dieses in (90) gesetzt, giebt
$\sin \mu - \frac{1}{2} \cos \delta . \sin (\mu - \delta) . \tau^2 = \sin \eta$

92

(*) Diese Mittagshöhe wird von H an gerechnet. Für eine Abweichung die grösser als die Polhöhe wäre, betrüge sie mehr als 90 Grad. Ein solcher Stern gienge nähmlich vom Scheitel nordwärts, durch die Mittagsfläche, und man würde seine Mittagshöhe eigentlich von R rechnen.

92 Also ist $\mu - \eta = \frac{\text{col}\delta . \text{sin}(\mu - \delta) . \tau^2}{2 \text{ col}\eta}$

Hier darf man rechter Hand im Zähler, η statt μ setzen;

Drückt man alsdenn $\text{sin}(\eta - \delta)$ gehörig durch die Einus seiner Theile aus, so wird das was ins Quadrat des Stundenwinkels multiplicirt ist

$= \frac{1}{2} . \text{col}\delta . (\text{tang}\eta . \text{col}\delta - \text{sin}\delta)$

$= \frac{1}{2} . \text{col}\delta^2 . (\text{tang}\eta - \text{tang}\delta)$

Aber $\text{tang}\eta - \text{tang}\delta = \frac{\text{sin}(\eta - \delta)}{\text{col}\eta . \text{col}\delta}$

Also wird dieser Coefficient des Quadrats des Stundenwinkels $\frac{1}{2} . \frac{\text{sin}(\eta - \delta}{\text{col}\eta} . \text{col}\delta$

93. Es sey $\tau = p . e$, $\mu - \eta = q . e$

So ist $q = \frac{\text{sin}(\eta - \delta) . \text{col}\delta}{\text{col}\eta} . \frac{1}{2} e . p^2$

Exempel Ein Planet habe vier Sternminuten vor seinem Durchgange durch die Mittagsfläche 65 Grad Höhe, und 23 Gr 50 M Abweichung. Wieviel ist seine Mittagshöhe grösser als die gefundene?

Also $\eta = 65^\circ$; $\delta = 23^\circ 50^1$; $p = 3600^\circ$;

$p . p = 12960000$; $\eta - \delta = 41^\circ 10^1$

log sin $(\eta - \delta)$	=	9,8183919 — 10
log col δ	=	9,9612904 — 10
log p. p	=	7,1129400
Summe	=	+6,8926223

— log col η

$$\begin{array}{l} -\log\cos\eta = -9{,}6259483 + 10 \\ +\log\frac{1}{2}e = -5{,}6154551 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Summe} = -5{,}2414034 \\ \qquad\quad + 6{,}8926223 \end{array}$$

$$\log\eta = +1{,}6512189$$

gehört zu 44, 79

Um soviel Secunden ist die Mittagshöhe gröſſer.

Man findet die Formel wo der Unterschied der Tangenten vorkömmt, ohne Beweis beym Hr. de la Lande; Astr. 2054; I Ausg. 2574 II. Ausg. Er hat darnach dieß Exempel berechnet und giebt 48 Secunden an.

94 Bey südlicher Abweichung ist (10) zu bemerken, da braucht man nähmlich für η — δ, die Summe der Höhe und der südlichen Abweichung.

95 Man siht hieraus, daß die Zeit des Mittags, aus der größten Höhe der Sonne, sehr unsicher zu finden ist weil um den Mittag herum, die Höhen in ein paar Minuten sich fast unmerklich ändern.

Es läßt sich nähmlich, nahe um Meridiane, was in pp multiplicirt wird ohngefähr für unveränderlich annehmen und da verhält sich q wie das Quadrat von p;

Wäre also für den Planeten für den im Exempel gerechnet worden, eine Minute vor seinem Durchgange durch die Mittagsfläche $= \frac{48}{16} = 3$ Secunden.

96. Wenn man überhaupt $\cos\tau = 1 - u$, und

$\cos\varepsilon$

$\cos\varepsilon$ statt $\sin(\mu - \delta)$ setzt, so giebt das Verfahren wie in (91) $\sin\mu - \sin\eta = \cos\varepsilon.\cos\delta.u$
Dieser Unterschied der beyden Sinusse ist also nie grösser als $\cos\varepsilon\, u$; und verschwindet für 90 Gr. Abweichung weil an einem gegebenen Orte, der Pol immer eine Höhe behält.

Wenn weder Stern noch Beobachter im Aequator sind, so beträgt dieser Unterschied allemahl weniger als u.

97. **Vergleichung zwischen Azimuth, Stundenwinkel, Abweichung, und Höhe.**

Im Dreyecke PSZ; ist
$\sin ZS : \sin PS = \sin P : \sin Z$; das ist
$$\sin\alpha = \frac{\sin\tau\cos\delta}{\cos\eta}$$

Einer gegebenen Verticalfläche Abweichung von der Mittagsfläche zu finden.

98. Diese Abweichung ist ihr Azimuth.

Man nehme mit einem beweglichen Quadranten übe einstimmende Höhen eines Sternes; daraus giebt sich die Zeit seines Durchganges durch die Mittagsfläche. (75)

Man beobachte die Zeit wenn der Stern durch die gegebene Verticalfläche geht diese mit der Zeit des Durchganges durch die Mittagsfläche vergliechen giebt τ, den Bogen, der beyder Zeiten Unterschied ausdruckt.

Indem er durch diese Verticalfläche geht, messe man auch seine Höhe $= \eta$;

Darf man nun seine Abweichung als bekannt annehmen, so hat man δ, also Alles was in (97) nöthig ist α zu berechnen.

99. Es ist klar daß dieses Verfahren, das Azimuth jeder Verticalfläche, z. E. einer Mauer finden lehrt, sie mag viel oder wenig von der Mittagsfläche abweichen. Wie man die Höhe des Sternes indem er durch die Fläche geht nehmen soll, ist auch leicht zu sehen. Will man solches mit dem beweglichen Quadranten verrichten, so bringe man nur an die Mauer ein Fernrohr dergestalt an, daß sich desselben Axe der Mauer parallel drehen läßt, man lasse jemand acht geben, wenn der Stern in dieses Fernrohr kömmt und richte zu gleicher Zeit, des Quadranten Fernrohr nach ihm. Weil alsdenn beyde Fernröhre parallel sind, so giebt der Quadrant die Höhe des Sterns.

100. Wäre aber an der Verticalfläche selbst ein Mauerquadrant so giebt derselbe die Höhe des Sterns beym Durchgange durch diese Fläche, und also ihr Azimuth; welches alsdenn klein seyn muß, wenn der Mauerquadrant zu der Absicht (86) erträglich brauchbar seyn soll.

101. Aus (97) wird $\sin \tau = \frac{\cos \eta}{\cos \delta} \cdot \sin \alpha$

Bey einer gegebenen Verticalfläche, ist nähmlich der Unterschied zwischen den Zeiten des Durchgan-

ges durch sie und durch die Mittagsfläche, nicht für einen Stern so groß als für den andern; diesen Unterschied bestimmt, nebst dem Azimuthe der Fläche, des Sterns Höhe in ihr, und seine Abweichung.

102. Hat man also für einen Mauerquadranten α (99) und mißt mit ihm die Höhe eines durch ihn gehenden Sterns, dessen Abweichung sonst bekannt ist, so weiß man, wie viel dieser Stern später oder eher in die Mittagsfläche kömmt, als in den Quadranten.

103. Dieses aber recht zu brauchen, muß man noch folgendes bemerken:

ZBW 5. Fig. sey der Quadrant des Scheitelkreises den diese abweichende Fläche in der Sphäre macht, H wie bisher Süden, R Norden im Horizont, und der genannte Quadrant auf der Ostseite. 5 f.

104 Wenn ein Stern den die tägliche Bewegung von Osten herführt, eher in die Verticalfläche kömmt als in die Mittagsfläche, so ist offenbahr daß diese Verticalfläche, von der Mittagsfläche gegen Osten abweicht, wie der Quadrant sie darstellt.

105 Weil sie aber, an der Ostseite mit der Mittagsfläche zween Nebeuwinkel macht, so muß man entscheiden ob der spitzige gegen Norden oder Süden fällt.

106 Hatte man das Gesicht gegen Norden gekehrt als man den Stern durch sie gehn sahe, so macht sie den spitzigen Winkel gegen Norden, er ist WZR;

Sah man gegen Süden, so ist WZH spitzig.

107 Es bedeute also ξ den spitzigen Winkel den die Verticalfläche ostwärts mit der Mittagsfläche macht so ist (97) $\sin \xi = \frac{\sin \tau . \cos \delta}{\cos \eta}$

108 Diese Formel die nur den Sinus giebt, entscheidet nicht ob der spitzige Winkel nach Süden oder nach Norden fällt; das entscheidet also (106)

109. Der Bogen WZ auf des Meridians Weststeite fortgeführt, bis er da wieder den Horizont schneidet, macht auf selbiger Seite auch zweene Winkel mit dem Meridiane, Nebenwinkel von WZR; WZH.

110. Sieht man den Stern, später in der Verticalfläche als im Meridiane, so erhellt daß man ihn in dem Theile der Verticalfläche sieht, der westwärts des Meridians liegt.

Dieser Theil macht wiederum seinen spitzigen Winkel gegen Norden oder gegen Süden, nachdem man bey Betrachtung des Sterns, das Gesicht nordwärts oder südwärts gekehrt hatte.

6 F. 111. Sind diese Umstände entschieden, 6 F. so sey HR die Mittagslinie, E auf der Ostseite F auf der Westseite, also ECH; FCH; die Nebenwinkel welche eine Seite der abweichenden Verticalfläche mit beyden Seiten der Mittagsfläche macht.

112. Der spitzige Winkel HCE = FCR heisse ξ, und $\frac{\cos \eta \sin \xi}{\cos \delta}$ bedeute den Sinus eines gewissen Bogens; η des Sterns Höhe in der Verticalfläche.

113.

113. Ist H Süden, R Norden, so kömmt ein Stern der südwärts durch diese Fläche geht, soviel eher in sie als in die Mittagsfläche, so viel der Bogen (112) in Zeit beträgt.

Ein Stern der **nordwärts** durchgeht, so viel **später** wenn er von **Osten** her in sie kömmt, soviel **eher** wenn er von **Westen** her in sie kömmt, wie bey Sternen die nicht untergehen geschehen kann.

114. Schneidet die Verticalfläche den Horizont in e f; so daß nun die spitzigen Winkel eCR ; fCH, ξ heissen, so kömmt ein Stern der südwärts durch sie geht, um die Zeit des Bogens (112) **später** in sie, der **nordwärts** durchgeht, um so viel **eher** oder **später** nachdem er von **Osten** oder von **Westen** in sie kömmt.

115. Man kann sich 113; 114; an einer Himmelskugel leicht sinnlich machen, wenn man z. E. nur einen Streifen Papier durchs Zenith gelegt so um die Kugel beugt, daß er einen halben Scheitelkreis vorstellt, und ihn nach Erfodern Winkel mit dem Meridiane machen läßt.

Wieviel ein Stern in eine geneigte Ebene anders kömmt als in die Mittagsfläche.

116 Eine Ebene H S R 3. Fig welche die Mittagslinie in H R schneidet, mache mit der Mittagsfläche den Winkel H K P = R H P = φ; Es ist die Höhe des Sterns in ihr gegeben also Z S; und seine Abweichung; also P S; Man sucht δ Z P. 3f.

Im Dreyecke Z S R; hat man, nebst dem Winkel

kel bey R; die Seiten ZR = 90° und ZS; daraus suche man SZR.

Hat man diesen Winkel, so findet man im Dreyecke SZP; aus ihm und den Seiten ZS; SP; den Winkel P

Statt des ersten Dreyecks brauche man SVR; welches bey V; rechtwinklicht ist, wo SV = η; SRV = 90° — φ; und VR des Winkels SZP Maas ist, diese Seite suche man; Aus rechtw. II; wird

hier $\sin VR = \frac{\text{tang } VS}{\text{tang } SRV}$ also $\sin Z = \text{tang } \eta . \text{tang } \varphi$

Daher, im Dreyecke ZSP, wo SPZ = τ

$$\sin \tau = \frac{\sin ZS \sin Z}{\sin PS} = \frac{\sin \eta \ \text{tang } \varphi}{\text{col } \delta}$$

117. Das Verfahren 98; 99; läßt sich auch bey dieser geneigten Fläche anbringen, und so hat man für ihre Neigung $\text{tang } \varphi = \frac{\text{col } \delta . \sin \tau}{\sin \eta}$

118 Ist diese Fläche, ein Mauerquadrant, der nicht völlig lothrecht steht, und man verfährt mit einem Sterne der durch ihn geht so als wollte man des Sterns Höhe nehmen, so bekömmt man dadurch nicht eigentlich die Höhe in diesem Durchgange, denn die erfodert daß der Quadrant völlig vertical steht; Was man aber bekömmt, wird doch von der wahren Höhe nur wenig unterschieden seyn, weil der Quadrant gewiß nicht sehr geneigt seyn darf, wenn man ihn brauchen will. Also kann man dieses,

ses, so wenig Unrichtige, in (116) statt η brauchen, daraus man φ ohne merklichen Fehler finden wird.

Was für ein Fehler in Zeit aus des Fernrohres Neigung gegen die Mittagsfläche entsteht.

119. Die Axe des Fernrohres sey der Mittagsfläche nicht parallel, sondern mache mit ihr einen Winkel $= \psi$; Man fragt: wieviel ein Stern eher oder später in diese Axe kommen wird, als in die Mittagsfläche.

120. C Fig 4 sey der Mittelpunct der Sphäre, in dem das Auge sich allemahl befindet, PZH im Meridian, S der Stern, nach dem die Axe des Fernrohrs CS gerichtet ist; durch sie sey eine Ebene senkrecht auf die Mittagsfläche, und schneide die Mittagsfläche in CF; so ist SCF der Axe Neigung gegen die Mittagsfläche $= \psi$, dieser Neigung Maaß ist SF ein Bogen eines größten Kreises der bey F einen rechten Winkel mit der Mittagsfläche macht. 4f.

Folglich ist im Dreyecke SFP;

$$\sin PS : 1 = \sin FS : \sin P \text{ oder } \sin \tau = \frac{\sin \psi}{\operatorname{col} \delta}$$

121. Weiß man also vermittelst gleich grosser Höhen eines Sterns, die Zeit seines Durchganges durch die Mittagsfläche, und vermöge der Beobachtung mit dem Fernrohre (106) die Zeit des Durchganges durch desselben Axe, so hat man τ; und folglich $\sin \psi = \operatorname{col} \delta . \sin \tau$

122. Die beyden Untersuchungen (116; 119) im Gebrauche völlig sicher anzuwenden ist noch Folgendes zu bemerken.

123. Die Ebene HSR (116) macht mit der Mittagsfläche einen spitzigen Winkel über dem Horizonte, einen andern gleichen darunter. Weil man aber nur den Theil von ihr braucht, der über dem Horizonte ist, so hat man nur den einen spitzigen Winkel zu betrachten, dadurch wird alles hie viel kürzer als bey der Verticalfläche (109)

124. Die Beobachtung (116) lehrt ob dieser spitzige Winkel über dem Horizonte, ostwärts oder westwärts der Mittagsfläche liegt; Im ersten Falle nähmlich kam der Stern in die schiefe Ebene von Osten her, eher als in die Mittagsfläche, im zweyten Falle später;

125. Und wenn man einmahl aus der Beobachtung diese Lage der Ebene bestimmt hat, so bedeutet $\frac{\sin\eta \cdot \tang\varphi}{\cos\delta}$, den Sinus eines Zeitbogens, um welchen jeder Stern der von Osten her in diese Ebene kömmt, eher oder später in sie kömmt, nachdem φ gegen Osten oder gegen Westen liegt.

126. ZS, 4 F. ist der Scheitelkreis in dessen Ebene die Axe des Fernrohres (119) ist; Er macht mit dem Meridian den Winkel FZS, und dieser Winkel ist spitzig oder stumpf, nach dem FS; oder FCS, spitzig oder stumpf ist (sphär. Trig. 1. Satz 6. Zus.)

127. Liegt also das Fernrohr, ostwärts der Mittagsfläche, so kömmt jeder Stern, den die tägliche Bewegung von Osten herführt, eher ins Fernrohr als in die Mittagsfläche; und ob das Fernrohr seinen spitzigen Winkel südwärts oder nordwärts macht erhellt daraus, ob man den Stern südwärts oder nordwärts sahe.

128. Eben so kömmt ein Stern von Osten her später ins Fernrohr, wenn es westwärts der Mittagsfläche liegt, und wieder entscheidet sich auf eben die Art die Lage seines spitzigen Winkels.

129. Weiß man also auch hier diese beyden Umstände des Winkels ψ nebst seiner Grösse aus der Beobachtung so kömmt ein Stern von Osten her um die Zeit eines Bogens dessen Sinus $\frac{\sin \psi}{\cos \delta}$ ist, eher oder später ins Fernrohr, als in die Mittagsfläche, nachdem ψ östlich oder westlich ist.

130. Wie man die Sätze 125; 129; für Sterne die von Westen herkommen ändern müsse ist aus (113; 114;) leicht zu sehen.

131. Man nehme also an, die drey Grössen ξ, φ, ψ, sind östlich, und finden alle drey zusammen statt (86) doch so daß jede für sich klein ist, so kömmt ein Stern von Osten her in das solchergestalt unrichtig stehende Fernrohr, eher als in die Mittagsfläche, um die Zeit eines Bogens dessen Sinus

$$\frac{\cos \eta \sin \xi + \sin \eta . \operatorname{tang} \varphi + \sin \psi}{\cos \delta}$$

nach 112; 125; 129; 132.

132. Ist eine von den drey Grössen, westlich, so siht man sie als verneint an, weil später in Absicht auf eher verneint ist, wenn beydes von der Mittagsfläche an gerechnet wird.

133. Durch einen solchen verneinten Theil, wird der Werth der Formel (131) kleiner als wenn dieser Theil in ihr bejaht wäre, das ist, der Stern kömmt nicht soviel eher in das Fernrohr, als er kommen würde, wenn die Grösse welche durch diesen verneinten Theil ausgedruckt wird, östlich wäre.

134. Es kann auch, durch einen oder mehr solche verneinte Theile, der ganze Werth (131) verneint werden, alsdenn kömmt der Stern später ins Fernrohr als in die Mittagsfläche.

135. Wie es sich mit einem Sterne verhält der von Westen her ins Fernrohr kömmt, ist aus dem Angeführten leicht zu beurtheilen.

136. Der seel. Mayer hat der K. Soc. d. W. zu Göttingen d. 6. Nov. 1756; obseruationes astronomicas quadrante murali habitas vorgelegt; der Aufsatz ist bisher noch ungedruckt vorhanden. Er erinnert darinnen unter andern, wenn die 83. . 85 angezeigten Fehler vorhanden wären, gebe dieß einen Fehler in Zeit der durch $\frac{A.\sin\eta + B.\cos\eta + C}{\cos\delta}$ ausgedruckt werde, wo sich A, B, C, durch drey Beobachtungen bestimmen liessen. Einen Beweis giebt er von dieser Formel nicht und sie siht so einem Räthsel ähnlicher als einem unterrichtenden Satze.

Die

Die beygebrachten Rechnungen lösen dieses Räthsel folgendergestalt auf

$A = \text{tang}\,\varphi$ (116) $B = \text{sin}\,\xi$ (112) $C = \text{sin}\,\psi$ (129).

Vorschriften wie man beym Zusammenrechnen der Theile dieser Formel verfahren soll (131. . 135) hat M. gar nicht erwähnt und ohne solche Vorschriften ist eine solche Formel nicht zu brauchen.

137. Weil man hier die Grössen (131) klein annimmt, so kann man sie selbst statt ihrer Sinusse und Tangenten brauchen, und der Zeitbogen um welchen der Stern früher in das Fernrohr als in die Mittagsfläche kommt, ist $\frac{\xi . \text{col}\,\eta + \varphi . \text{sin}\,\eta + \psi}{\text{col}\,\delta}$

138 Hieraus erhellt zugleich, das Verfahren, diese drey Grössen zu bestimmen, wenn man annimmt sie sind alle drey vorhanden aber unbekannt. Es ist folgendes: Bey drey Sternen, deren jeder eine andere Abweichung u. Höhe hat beobachte man wieviel jeder eher in das Fernrohr kömmt als in die Mittagsfläche. Die Bogen für diese Zeiten heissen C, c; $\mathfrak{C}$; (wenn ein Stern später kömmt, so ist sein Bogen verneint (132)) Die Abweichungen der Sterne sind B; b; $\mathfrak{B}$; ihre Höhen A; a; $\mathfrak{A}$; so hat man folgende drey Gleichungen, in denen die griechischen Buchstaben unbekannt sind

I) $C . \text{col}\,B = \xi . \text{col}\,A + \varphi . \text{sin}\,A + \psi$

II) $c . \text{col}\,b = \xi . \text{col}\,a + \varphi . \text{sin}\,a + \psi$

III) $\mathfrak{C} . \text{col}\,\mathfrak{B} = \xi . \text{col}\,\mathfrak{A} + \varphi . \text{sin}\,\mathfrak{A} + \psi$

Wenn ich nach dem gewöhnlichen Verfahren in

der Algebra, aus diesen drey Gleichungen die drey unbekannten Grössen suche so finde ich folgendes

Es sey $N = \sin(a-A) + \sin(A-\mathfrak{A}) + \sin(\mathfrak{A}-a)$ so werden die Werthe von ξ, φ, ψ; drey Brüche da des ersten und dritten Nenner N; des zweyten — N ist; die Zähler sind

C. cos B (sin a — sin $\mathfrak{A}$)
+ c. cos b. (sin $\mathfrak{A}$ — sin A)
+ C. cos B. (sin A — sin a)
für ξ

C. cos B. (cos a — cos $\mathfrak{A}$)
+ c. cos b (cos $\mathfrak{A}$ — cos A)
+ C. cos B. (cos A — cos a)
für φ;

C. cos B. sin ($\mathfrak{A}$ — a)
+ c. cos b. sin (A — $\mathfrak{A}$)
+ C. cos B. sin (a — A)
für ψ

139. **Exempel** Eine Ebene mache von Süden gegen Westen $\xi = 3^{\prime} = 180^{\prime\prime}$; gegen Osten $\varphi = 120^{\prime\prime}$; das Fernrohr mache gegen Osten $\psi = 60^{\prime\prime}$; Eines Sterns nordliche Abweichung sey $\delta = 20^{\circ}$; seine Höhe im Fernrohre $\eta = 58^{\circ}28^{\prime}$; So ist

log cos $58^{\circ}28^{\prime} = 9,7184971 - 10$
log 180 $= 2,2552725$

$1,9737696$

gehört zu $-94,13$; das Verneinte weil der Winkel westlich ist.

log sin

log sin 58° 28′ = 9,9306109 — 10
log 120 = 2,0791812

2,0097921

gehört zu + 102,28
ψ = 60

162,28
— 94 13

Der Zähler + 68,15
log 68,15 = 1,8334659
— log cos 20° = — 9,9729858 + 10

1,8604801

gehört zu 72″,52 = 1′ 12″,52

Dieser Bogen in mittlere Sonnenzeit verwandelt giebt (63)

1′ = 3ſ59t
12″ = 47 51
30‴ = 2

4 48 51

Also kömmt der Stern wenn er gegen Süden gesehn wird, 4 ſ 49 t fast 5 ſ eher in dieses Fernrohr als in die Mittagsfläche.

Zu Göttingen hätte die Sonne ohngefähr die Abweichung und Mittagshöhe wie sie zusammen angenommen sind. Wäre also daselbst die Stellung eines Fernrohrs das in der Mittagsfläche stehen sollte, auf die angezeigte Art fehlerhaft, so käme die Sonne an dem Tage da ihre Abweichung 20 Gr ist, etwa 5 ſ eher in dieses Fernrohr als in die Mittagsfläche, das ist: Man gäbe den Mittag 5 ſ zu früh

an, wenn man ihren Durchgang durch dieses Fernrohr für den Augenblick des Mittags annähme.

Fernere Untersuchung, wieviel Fehler in Zeit es giebt, wenn eine Verticalfläche nicht genau in der Mittagsfläche ist.

140. Diese Unrichtigkeit ist am schwersten zu vermeiden und kann am beträchtlichsten werden, daher verdient die Formel die für sie (112) gegeben worden noch einige Untersuchung.

141. Weil doch die Verticalfläche nahe an der Mittagsfläche liegen soll, so kann man bynahe $\eta = \mu$ (90) annehmen (91)

142. So beträgt der Fehler im Zeitbogen (112) $\frac{\text{col}\,\mu}{\text{col}\,\delta}$. $\sin\xi$, wo $\text{col}\,\mu = \sin(\varepsilon - \delta)$

143. Dieser Fehler, nimmt für nordliche Abweichung beständig ab, wenn die Abweichung zunimmt. Wenn diese Abweichung der Polhöhe sehr nahe kömmt, also der Stern sehr nahe am Scheitel durch die Mittagsfläche geht, ist die Voraussetzung (141) am wenigsten der Wahrheit nahe (94) also auch die Folge daraus (142)

144. Ist die nordliche Abweichung grösser als die Polhöhe so wird $\text{col}\,\mu$ verneint (20) also die Formel (142) verneint, weil alsdenn der Stern durch die Verticalfläche in Absicht des Meridians auf der Seite geht die der wohin HCE fällt, (112) entgegengesetzt ist.

145.

145. Weil $\sin(\varepsilon - \delta) = \sin\varepsilon . \cos\delta - \cos\varepsilon . \sin\delta$

so ist $\frac{\cos\mu}{\cos\delta} = \cos\varepsilon . (\text{tang}\,\varepsilon - \text{tang}\,\delta)$

146. Dieser Ausdruck wächst beständig für südliche Abweichung (10) weil aber die südliche Abweichung wenn der Stern über dem Horizonte erscheinen soll, nicht grösser werden darf als die Höhe des Aequators; so ist dieses Ausdruckes größter Werth $\cos\varepsilon . (\text{tang}\,\varepsilon + \cot\varepsilon) = \frac{1}{\sin\varepsilon}$; woraus erhellt, wie weit der Fehler (142) bey einer gegebenen Polhöhe wachsen kann.

147. **Exempel** Die Polhöhe sey $51^\circ\ 32^\prime$, südliche Abweichung $= 23^\circ$; so ist $\varepsilon - \delta = 74^\circ\ 32^\prime$; also

$\log\cos\mu = 9,9839805 - 10$
$-\log\cos\delta = -9,9640261 + 10$

$0,0199544$

gehört zu $1,047$

Wäre $\xi = 3^\prime$ so käme $3^\prime,141 = 3^\prime\ 8^{\prime\prime},46$ welches in mittlerer Zeit $12^s\ 30^t$ beträgt. Soviel vormittage, käme die Sonne um den Winterstand in eine Verticalfläche die mit der Mittagsfläche gegen Morgen einen Winkel von $3^\prime$ machte.

Für eben so grosse nordliche Abweichung ist

$\varepsilon - \delta = 28^\circ\ 32^\prime$
$\log\cos\mu = 9,6791279 - 10$
$-\log\cos\delta = -9,9640261 + 10$

$9,7151018 - 10$

gehört zu 0,5189

Giebt bey eben der vorigen Verticalfläche den Zeitbogen $1^{I},5567 = 1'33^{II},402$; in Zeit 6ſ 12 t

Man ſ. unten (163)

148. Wenn die Verticalfläche ſehr von der Mittagsfläche unterſchieden wäre, (141) oder wenn man kein Werkzeug hätte Höhen zu meſſen, lieſſe ſich die bisherige Unterſuchung nicht wohl anbringen. Da dient folgende.

Vergleichung zwiſchen Polhöhe, Abweichung, Azimuth, und Stundenwinkel.

149. Aus der Proportion der Sinuſſe iſt

$$\text{col}\,\eta = \frac{\sin\tau.\,\text{col}\,\delta}{\sin\alpha}$$

150. I. Wenn man in 9; II; ſtatt $\text{col}\,\eta$ den Werth aus (149) ſetzt alsdenn die beyden Werthe von $\sin\eta$ die ſich aus (9; I u. 9; II) finden einander gleich ſetzt, ſo erhält man eine Gleichung, in der von den Gröſſen die in 9; I; 9; II; vorkommen, η nicht mehr zu finden iſt. Sie giebt nach gehöriger Rechnung

$$\cot\alpha = \frac{\text{col}\,\varepsilon.\,\text{tang}\,\delta - \sin\varepsilon\,\text{col}\,\tau}{\sin\tau}$$

Wodurch ſich aus Stundenwinkel, Polhöhe u. Abweichung das Azimuth finden lieſſe.

II Wenn ſich ein Stern im erſten Scheitelkreiſe befindet (Aſtr. 44) ſo iſt $\text{tang}\,\delta\,\cot\varepsilon = \text{col}\,\tau$

Der Sinus ſeiner Höhe allsdenn iſt (9; II) $= \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}$

Zusammengehörige Aenderungen des Azimuth und des Stundenwinkels.

151. Wenn man in 150; differentiirt so giebt die Rechnung

$$d\alpha = \frac{\cos\varepsilon . \operatorname{tang} \delta . \cos\tau - \sin\varepsilon}{\sin\tau^2} . \sin\alpha^2 . d\tau$$

152. **Aus Polhöhe, Abweichung und Azimuth den Zeitbogen zu finden.**

Die Gleichung (150) wird

$$\sin\tau = -\sin\varepsilon . \operatorname{tang}\alpha . \cos\tau + \cos\varepsilon . \operatorname{tang}\delta . \operatorname{tang}\alpha$$

Dieses mit I. Abh. 69; verglichen giebt

dorten x	f	g
hier τ	$-\sin\varepsilon \operatorname{tang}\alpha$	$+\cos\varepsilon . \operatorname{tang}\delta . \operatorname{tang}\alpha$

Ferner ist die dortige tang q hier $-\sin\varepsilon \operatorname{tang}\alpha$ oder $q = 180° -$ dem Bogen dessen Tangente $= \sin\varepsilon . \operatorname{tang}\alpha$

Es sey $\sin\varepsilon \operatorname{tang}\alpha = \cot\varkappa$, so ist

$q = 180° - (90° - k) = 90° + \varkappa$, und $\cos q = -\sin\varkappa$

Auch ist der dortige sin p oder g. cos q hier

$\cos\varepsilon . \operatorname{tang}\delta . \operatorname{tang}\alpha . - \sin\varkappa = -\cot\varepsilon . \operatorname{tang}\delta . \cos\varkappa$;

Man setze diese Grösse $= -\cos\lambda$; also

$\sin p = -\cos\lambda = \cos(180° - \lambda)$ also $p = \lambda - 90°$

so sind die beyden Werthe von τ;

Der erste $p + q = \lambda + \varkappa$

Der zweyte $180° - (p - q) = 360° + \varkappa - \lambda$ oder den ganzen Kreis weggelassen $\varkappa - \lambda$

wo $\cot\varkappa = \sin\varepsilon \operatorname{tang}\alpha$

$\cos\lambda = \cot\varepsilon . \operatorname{tang}\delta . \cos\varkappa$

153. Die Zweydeutigkeit des gesuchten Stundenwinkels läßt sich folgendergestalt erläutern.

Jeder Kreis auf der Kugel schneidet den andern zweymahl wenn er ihn schneidet, wie sich aus Geom. 49 S. 3. Zus. leicht einsehen läßt.

Folglich wird jedes Sterns Tagekreis, gar nicht, oder zweymahl von jedem Scheitelkreise geschnitten;

Hier ist nur das für Sterne nahe am Pole besonders, daß beyde Durchschnitte über den Horizont fallen.

7.8.f. Diese beyden Durchschnitte 7; 8 Fig. seyen S, T, und B S b T der Tagekreis; so sind Z P S; Z P T; die beyden Stundenwinkel, die man aus der Formel folgendergestalt bestimmt:

Man nehme wie bisher immer an, P Z S sey ein spitziger Winkel gegen Norden und Osten,

7f. Man ziehe den Bogen P W, 7 Fig senkrecht auf Z S; so ist cot Z P W = sin ε. tang α (rechtw. VI) also Z P W = k;

An W P; lege man den Bogen P S so daß W P S = λ so ist Z P S der erste Werth von τ;

Die Winkel k, λ; sind beyde spitzig, weil ihre Cosinus bejaht sind.

Man nehme W P T = λ nach der Seite von P W die der nach welcher P S liegt entgegen gesetzt ist so ist Z P T = κ — λ; der zweyte Werth von τ.

154. Wenn κ > λ 7 Fig. so fallen P S; P T, beyde auf eine Seite des Punctes Z. Aus (153) ist

allsdenn $\text{col}\,\varkappa < \text{col}\,\lambda$ oder $1 < \frac{\text{col}\,\lambda}{\text{col}\,\varkappa}$ oder $\cot\varepsilon . \text{tang}\,\delta > 1$ oder $\text{tang}\,\delta > \text{tang}\,\varepsilon$ oder $\delta > \varepsilon$;

155. Wenn des Sterns Abweichung grösser ist als die Polhöhe, geht er durch die Verticalfläche (153) zweymahl auf der Ostseite.

156 Wenn $\delta = \varepsilon$ wird der zweyte Werth $= o$ (153) der Stern geht alsdenn im Scheitel durch

157. Wenn $\delta < \varepsilon$; so erhellt aus (154) daß alsdenn $\varkappa < \lambda$; Also wird der zweyte Werth von τ (153) verneint,

Da fällt PT 8. Fig. auf die Westseite, so daß $ZPT = \lambda - \varkappa$; Noch ist, wie vorhin $WP\Gamma = WPS = \lambda$ 8 f.

Hier ist des Sterns Abweichung kleiner als die Polhöhe, und er geht durch die Verticalfläche einmahl ostwärts das anderemahl westwärts.

158. Ob die Puncte S, T, auf einer Seite, oder auf entgegengesetzten der Mittagsfläche liegen, entscheidet die Beobachtung so: Wenn beyde nach Osten oder beyde nach Westen liegen, 7 Fig. so hat der Beobachter bey beyden das Gesuchte nordwärts gekehrt.

Ist aber einer ostwärts der andere westwärts, 8 Fig da sie doch beyde in einer Verticalfläche sind, so muß der Beobachter, wenn er nach T sehen will, den Rücken gegen S wenden, folglich gegen Süden zu sehn, weil er nach S gegen Norden zu sieht.

159. I Ist PZS ein stumpfer Winkel gegen

Norden u. Osten, also HZS ein spitziger gegen Süden u. Osten, so hat dieser HZS einen gleichen Scheitelwinkel auf der Westseite der Mittagsfläche oder, die Verticalfläche macht mit der Mittagsfläche einen spitzigen Winkel von Norden gegen Westen. Also bleiben die bisherigen Sätze (154..157) alle auch für diesen Fall, nur daß man in ihnen Westen statt Osten, u. Osten statt Westen setzt.

II. Damit man sich indessen so oft die Mühe erspart, solche Verwechslungen zu machen bey denen man sich leicht aus Vergessenheit irren kann, so entwerfe man sich die Figur eigentlich für diesen Fall

nf. III. PZH II Fig sey der Bogen des Meridians vom Nordpole bis Süden; ZV ein Scheitelkreis, der von **Süden nach Osten** einen spitzigen Winkel HZV = φ macht; Er macht folglich den gleichen spitzigen Winkel von Norden nach Westen und das Perpendikel PW fällt westwärts der Mittagsfläche.

IIII. Man nehme in diesem Scheitelkreise ostwärts nach Gefallen S; und WT = WS daß S, T, auf entgegengesetzten Seiten von W liegen, so kömmt ein Stern dessen Weite vom Pole = PS ist, in diesen Scheitelkreis einmahl in S ostwärts der Mittagsfläche das anderemahl in T westwärts, und die beyden Stundenwinkel sind ZPS; ZPT

V. Die Grössen die hier unbekannt sind, benenne man folgendergestalt

PW = h

ZPW = κ = 90° — k

WPS = λ = 90° — l

so ist im Dreyecke ZPW (rechtw. VI)
cot P = col PZ tang Z das ist
cot $\varkappa$ oder tang k = sin ε. tang φ
auch (rechtw. I) sin h = col ε. sin φ
(rechtw. V) col $\varkappa$ oder sin k = tang ε. tang h
Und im Dreyecke PWS auch aus
(rechtw. V) col λ oder sin l = tang δ tang h
= tang δ cot ε sin k

VI. So sind nun die beyden Stundenwinkel
der östliche ZPS = λ — $\varkappa$
= k — l
der westliche ZPT = λ + $\varkappa$ = 180° — (k + l)

VII. Liegt ZV westwärts der Mittagsfläche so liegen PZ; PW; ostwärts von PS; und wenn also φ einen Winkel von Süden nach Westen bedeutet so geben, alles übrige auf die bisherige Art berechnet die Wehrte in VI. für ZPS den westlichen Winkel, für ZPT den östlichen.

Exempel

160. φ = 1° oststwärts, ε = 51° 32'; δ = 20°

log tang φ = 8,2419215
log sin ε = 9,8937422

log tang k = 8,1356667

Es fällt also k zwischen 46 u. 47 Minuten. Und weil für solche kleine Winkel Bogen, Sinus u. Tangente, verwechselt werden dürfen, so läßt sich folgendergestalt verfahren, wenn man die bisherige Rechnung fortsetzen will. Man vermindere den gefundenen Logarithmen um 10; so hat man den Lo-

ga-

garithmen von tang k für den Halbmesser = 1; Weil man nun dieser Tangente ihren Bogen für gleichgültig annimmt so ziehe man von diesem Logarithmen den Logarithmen der Länge einer Secunde für den Halbmesser = 1 ab; de Rest ist der Logarithme des Quotienten, den k mit einer Secunde dividirt gibt, das ist, der Logarithme der Zahl von Secunden die auf k gehen.

log tang k = 8, 1356667 — 10
— log 1'' = + 5, 3144251

3, 4500918

giebt k = 2819'', 6 = 46' 59''

Wenn man den zuerst gefundenen log tab tang k in Gellibrands Tafeln aufsucht so gehört er zu einem Bogen zwischen 46' 48'' und 47', welchem also der jezt gefundene Werth nicht wiederspricht.

Hieraus l in (159; V) zu berechnen müßte man sin k suchen. Man würde statt dessen ohne merklichen Irrthum sin 47' annehmen. Weil man aber wieder bey dem kleinen Winkel l, Sinus und Bogen verwechseln darf so brauche man statt sin k, die Menge von Secunden die auf k gehen, dann findet man statt sin l die Menge von Secunden die auf l gehen.

log k = 3, 4500918
log cot ε = 9, 9000865 — 10

M = 3 3501783
log tang δ = 9, 5610658 — 10

log l = 2, 9112441

giebt

giebt l = 815″,16 oder
l = 13′, 35″,
k = 46 59

ZPS = 33 24
ZPT = 180° — (1° 0′ 34″)
= 178° 59′ 26″

In mittlerer Zeit, beträgt der östliche Zeitwinkel ZPS; 2 m 13 ſ 13 t 43 qua; ſo viel kömmt der Stern eher in die Verticalfläche als in die Mittagsfläche.

Der weſtliche ZPT beträgt 11 h 54 m 0 ſ 44 t 22 qu; ſo lange nach ſeinem Durchgange durch die Mittagsfläche kömmt er wieder in dieſe Verticalfläche. Aber, wie aus der Gröſſe ſeines halben Tagebogens erhellt, lange nach ſeinem Untergange; Folglich iſt er nur bey S in der Verticalfläche zu ſehen.

Bemerkungen über vorhergehende Formeln.

161. I Für eine gegebene Verticalfläche, iſt ſo ein Logarithme wie M; (160) für alle Sterne einerley, daher habe ich ihn beſonders berechnet.

II Allemahl iſt k kleiner als φ (159 V)

III. Wenn die nordliche Abweichung kleiner iſt als die Polhöhe, ſo iſt l < k (159; V)

IIII. Das Gegentheil erfolgt wenn jene gröſſer iſt als dieſe. Da wird der Werth von ZPS (159 VI) verneint. Nähmlich der Stern geht alsdenn durch die Mittagsfläche in dem Theile der von Z nach Norden zu liegt und geht alſo durch die Ver-

tical-

ticalfläche westwärts der Mittagsfläche, wenn die Figur annimmt es geschehe ostwärts, u. umgekehrt.

162. Wenn φ nicht viel über einen oder ein paar Grade beträgt, daß man ohne merklichen Irrthum Tangente und Bogen verwechseln darf, so ist in (159; V) allemahl $k = \sin \varepsilon . \varphi$

Gilt nun 161; III; oder ist auch bey einer grössern Abweichung doch $\text{tang} \delta . \cot \varepsilon$ nicht gar zu groß, so kann man in (159; V) $l = \text{tang} \delta . \cot \varepsilon . k$ setzen, (wie im Exempel 160;);

Alsdenn aber, hat man, den Werth von k aus nächst vorhergehender Gleichung gesetzt

$$l = \text{tang} \delta . \text{col} \varepsilon . \varphi$$

163. **Exempel** Bey voriger Polhöhe (160) mache die Verticalfläche einen Winkel von $3^{\prime} = 180^{\prime\prime}$ mit der Mittagsfläche von S. gegen O: die Abweichung sey 23° südlich, also verneint.

$\log \varphi = \log 180 = 2,2552725$

$\log \sin \varepsilon = 9,8937452 - 10$

$\log k = 2,1490177$

$\log \cot \varepsilon = 9,9000865 - 10$

$\log \text{tang} \delta = 9,6278519 - 10$

$\log l = 1,6769561$

giebt $k = + 140^{\prime\prime},93$

$l = - 47,53$

$k - l = + 188,46$

$= 3^{\prime} 8^{\prime\prime} 27^{\prime\prime\prime},6$

welches in mittlerer Zeit 12 f 31 t 36 qu beträgt.

Ist

Ist alles wie vorhin, nur die Abweichung nordlich so wird l bejaht und $k - l = 93^{11},4 = 1^{1}\,33^{11},4$

Dieses Exempel ist schon (147) berechnet worden. Die hiesigen Zahlen stimmen bey nordlicher Abweichung genau mit den dortigen überein, nicht so gut bey südlicher.

Dorten nähmlich, brauchte ich die Mittagshöhe der Sonne statt ihrer Höhe in der Verticalfläche. Der Unterschied zwischen beyden, beträgt wenig in Vergleichung mit ihnen, bey nordlicher Abweichung, mehr bey südlicher, weil bey nordlicher, beyde Höhen groß, bey südlicher klein sind. Ich brauchte also statt der eigentlichen Höhe, eine, die in Vergleichung mit ihr, bey südlicher Abweichung fehlerhafter war als bey nordlicher.

164. Das bisherige (159...163) ist besonders bey den Weltkörpern brauchbar, die nur südwärts durch die Mittagsfläche gehen. Man kann sich das was in 152..158 gesagt ist besonders so einrichten, daß es bey Sternen die nordwärts durch die Mittagsfläche gehen brauchbar ist.

165. In der Voraussetzung (153), nenne man auch hier $\varkappa = 90° - k$; $\lambda = 90° - l$

So ist aus (152)

$\cot \varkappa$ oder $\tang k = \sin \varepsilon . \tang \alpha$

$\cos \lambda$ oder $\sin l = \cot \varepsilon . \tang \delta . \sin k$

Nun aus $\not\Delta$ 53

$ZPS = \lambda + \varkappa$

$= 180 - (k + l)$

$ZPT = \varkappa - \lambda$

$= l - k$

Der

Der Unterschied zwischen diesen Formeln und den 159 VI; rührt daher, daß hier der Winkel von Norden gegen Osten, dort von Süden gegen Osten spitzig angenommen ist.

Im Dreyecke ZPW; ist auch für das Perpendikel PW = h; aus (rechtw. I) sin h = col ε. sin α

166. Wenn ein Stern vom Pole den Abstand PW hat so berührt sein Tagekreis die Verticalfläche.

Alsdenn ist der Sinus seiner Weite vom Pole oder col δ = col ε. sin α (165)

Ist der Stern noch näher beym Pole, oder ist col δ < col ε. sin α, so schneidet sein Tagekreis die Verticalfläche nicht, oder der Stern kömmt nicht in sie, und die Aufgabe wird unmöglich.

Man hat auch im Dreyecke ZPW aus (rechtw.

V) $\cot h = \frac{\text{tang } \varepsilon}{\text{col } \varkappa}$ oder tang h = col ϰ. cot ε

Wenn die Aufgabe möglich seyn soll, so muß tang h < cot δ seyn, dieses giebt

tang δ. cot ε. col ϰ < 1.

Nähmlich was hie linker Hand steht ist der Werth von sin l (165) welcher nicht grösser als 1 seyn darf.

167. Wenn Alles bleibt nur nordliche Abweichung wächst, so nimmt l bis auf 90° zu und wird darnach unmöglich (166). Weil nun k ungeändert bleibt so kann ein Stern der grosse nordliche Abweichung hat durch diese Verticalfläche zu einer Zeit gehen, die von der Zeit seines Durchganges durch die Mittagsfläche gar sehr unterschieden ist,

wenn

wenn gleich die Verticalfläche nur einen kleinen Winkel mit der Mittagsfläche macht.

168. **Exempel.** Man betrachte die Verticalfläche (160) so wie sie von Norden nach Westen einen Winkel von 1° macht. Man suche wie der Polarstern durch sie geht, dessen Abweichung $= 88° 5'$

Also wird k so groß kommen wie in (160) Man darf es aber zur fernern Rechnung hie nicht wie dort in Secunden ausdrucken; weil man aus der Abweichung sieht, daß l groß wird. Man nehme also $k = 47'$ und rechne nach (165) ferner so

$\log \sin k = 8,1358104$
$\log \cot \varepsilon = 9,9000865$
$M = 18,0358969$ (siehe 161; I)
$\log \text{tang } \delta = 11,4754140$
$\log \sin l = 9,5113109$
$l = 180° 56'$
$k = 47$
$l - k = 18\ 9 = ZPT$
$l + k = 19\ 43$
$180° - (l+k) = 160\ 17 = ZPS$

Ferner beträgt in Sternzeit
$ZPS = 10H\ 41\ M\ 12\ S$
$ZPT = 1\ 12\ 32$

Beyde Stundenwinkel haben einerley Zeichen, liegen also beyde auf einer Seite des Meridians, auf der westlichen.

Wenn man annimmt die Figur 7 Fig. stelle die

west-

westliche Seite des Meridians vor, so ist ZPS der erste Stundenwinkel, ZPT der zweyte.

Nach der Zeitordnung aber kömmt der Stern, durch die Umdrehung der Himmelskugel, zuerst in T, 1 H, 12 M 32 S **nach** seinem **obern** Durchgange durch die Mittagsfläche, alsden in S; 10 H 41 M 12 S **nach** erwähntem **obern** Durchgange, oder 1 H 18 M 48 S **vor** dem **untern.**

169. Wenn ein Stern zweymahl in derselben Verticalfläche kann gesehen werden, wie bey nordlichen Sternen angeht, so beobachte man nach der Uhr, den Augenblick wenn er zum erstenmahle in sie kömmt, 7 Fig und den, wenn er zum zweytenmahle in sie kömmt.

170 Liegt der spitzige Winkel PZV gegen Westen, wie (168) so ist der Stern den ersten Augenblick in T, den zweyten in S;

171 Liegt dieser spitzige Winkel gegen Osten, so ist der Stern den ersten Augenblick in S den zweyten in T.

172 Die Zeit zwischen beyden Augenblicken in Bogen des Aequators verwandelt giebt das Maaß des Winkels SPT = 2λ (153)

173. Weil vermöge der täglichen Bewegung alle Sterne in der ostlichen Halbkugel steigen in der westlichen sich senken, so erhellt folgendes

Wenn ein Stern über dem Horizonte zwey mahl in eine Verticalfläche kömmt so steht er in ihr am höchsten, wo er von Osten her in sie kömmt am niedrigsten wo er von Westen her in sie kömmt.

Denn,

Denn, so verhält es sich im Meridiane. Wenn nun der Stern in eine andere Verticalfläche, von Osten her kömmt so steigt er noch aus ihr bis zu seiner grösten Höhe, wenn sie nach Osten zu liegt oder kömmt in sie zunächst nach seiner grösten Höhe, wenn sie nach Westen zu liegt. Jedesmahl steht er also in ihr höher, als wenn er aus ihr bald nach seiner niedrigsten Höhe zugeht oder zunächst nach seiner geringsten Höhe in sie kömmt. Eines von diesen beyden thut er, wenn er von Westen her in sie kömmt das erste wenn sie nach Westen, das andere wenn sie nach Osten von der Mittagsfläche liegt.

174. Z V 7; 8 Fig. bedeute den Quadranten des Scheitelkreises der sich vom Scheitel nach Norden zu erstreckt. Ob von des Sterns Tagekreise (153) beyde Durchschnitte mit dem Scheitelkreise, auf einer Seite der Mittagsfläche (155) oder auf unterschiedenen (157) liegen mögen, entscheidet die Beobachtung nach (158) 7-8. f.

175 Dieses Tagekreises kleineres Stück ist allemahl S b T auf der Seite des Scheitelkreises auf welcher der Pol nicht liegt.

176 Also auf der Ostseite wenn Z V gegen Osten, auf der Westseite wenn Z V gegen Westen der Mittagsfläche liegt.

177. Liegt also Z V gegen Osten, so braucht der Stern von seiner geringsten Höhe bey S; an die grö-ste bey T zu kommen weniger als 12 Sternstunden von der grösten an die geringste zu kommen mehr.

178. Liegt Z V gegen Westen, so braucht er

mehr als 12 Sternstunden von der kleinsten Höhe bis zur größten, weniger von der größten bis zur kleinsten.

179. **Durch Beobachtungen eines Sterns um den Pol, den Winkel einer Verticalfläche mit der Mittagsfläche zu finden.**

Man beobachte den Stern die beydemahl, da er in diese Verticalfläche kömmt. Die Beobachtungen geben λ; (172) Also hat man aus (152)

$\cot \varkappa = \text{tang } \varepsilon . \cos \delta . \cos \lambda$; und daher

$$\text{tang } \alpha = \frac{\cot \varkappa}{\sin \varepsilon}$$

Ob dieser spitzige Winkel, den der Theil der Verticalfläche, von der Scheitellinie nach Norden zu, mit der Mittagsfläche macht, gegen Osten oder gegen Westen fällt, entscheidet 177; 178;

180. Dieses Verfahren dient besonders bey dem **Fernrohre in der Mittagsfläche** (80)

Man setze dabey voraus, die Queraxe um welche sich das Fernrohr dreht, sey genau horizontal; wenn sie also nicht völlig genau nach Osten und Westen geht, das ist, nicht völlig einen rechten Winkel mit der Mittagslinie macht, so wird das Fernrohr, bey seinem Herumdrehen um diese Axe, eine Verticalfläche beschrieben die nicht genau die Mittagsfläche ist.

Kann man es nun, sowohl nach Norden als nach Süden richten, so läßt sich vermöge (179) finden, wieviel die Verticalfläche in der es sich dreht von der Mittagsfläche abweicht.

181. Wenn λ beynahe 90° ist so darf man in (162) statt lin l den Bogen selbst brauchen. Ist nun die Abweichung nicht gar zu klein, und die Polhöhe nicht gar zu groß so wird $\frac{l}{\cot \varepsilon . \operatorname{tang} \delta} = k$ seyn; Wenn aber der Quotient linker Hand sehr groß würde so drückte er eigentlich lin k aus, den man alsdenn nicht mit k verwechseln dürfte.

Ist aber der Quotient klein, so hat man ferner $\alpha = \frac{k}{\operatorname{sin} \varepsilon}$ (162) Alsdenn giebt sich auch noch kürzer die Formel $\alpha = \frac{l}{\cos \varepsilon . \operatorname{tang} \delta}$

182. Die Untersuchung 149. . 181; findet sich, synthetisch vorgetragen in Ludlams Astronomical observations (Cambridge 17[illegible]9; 4) 131 u. f. §. Mir scheint die Art wie ich diese Formeln gefunden habe, leichter, und der Gebrauch meiner Formeln bequemer, als Ludlams Vorschriften. Er drückt alles durch Proportionen aus, wie sonst in der Trigonometrie gewöhnlich sind, und nennt die Sinus und Tangenten selbst welches bey Winkeln wo Secunden mit befindlich sind beschwerliche Berechnungen dieser trigonometrischen Linien verursacht, und bey so kleinen Winkeln nicht nöthig ist.

Exempel

183 Unter der Polhöhe 52° 13′ kam die Capella, in eine Verticalfläche,

unter dem Pole oder in S um 8 h 1 m 58 s
über dem Pole = = = T = 19 55 58

Unterschied 11 54

Den Tag darauf wieder
unter dem Pole in S um 8 0 0

Der Capelle Abweichung ist 45° 43′ 40″

Man verlangt die Lage dieser Verticalfläche gegen die Mittagsfläche.

Weil der Stern in sie eher unter dem Pole als über ihm kam, so macht sie einen spitzigen Winkel von Norden gegen Osten (171)

Der Stern aber kömmt in sie einmahl ostwärts der Mittagsfläche, das anderemahl westwärts (157)

Aus den beyden Durchgängen durch S;
folgt 24 H = 24 h — 118 s also ohne merklichen Irrthum 24 h = 24 H + 118 S (56) und
12 h = 12 H + 59 S und h = H + 4 S + 55 T also m = M + 4 T + 55 Qua; daraus findet sich durch den Canon der Seragenen

6 m = 0 H 6 M 0 S 29 T 30 Qua
12 h = 12 59

11 h 54 m = 11 54 58 39 30

Diese Sternzeit giebt in Bogen des Aequators 178° 44′ 37″ 37‴ 30⁗; soviel hält auch der Bogen S b T oder das Maaß des Winkels S P T;

Also ist aus (172) λ = 89° 22′ 18″ 48‴ 45⁗ oder (165) l = 37′ 41″ 11‴ 15⁗ oder alles auf Secunden gebracht, und was keine ganze Secunde beträgt ohngefähr genommen l = 2261″,2

Nun

Nun also nach (181)

$\log \cos \varepsilon = 9,7872317 - 10$

$\log \tang \delta = 10,0111184 - 10$

$0,7983501 - 1$ abgezogen von

$\log l = 3,3543389$ läßt

$\log \alpha = 3,5559888$

gehört zu 3597,4; also ist $\alpha = 59' 57'',4$

Dieser Winkel ist SZP 8. Fig. von N. nach O. oder desselben Scheitelwinkel von S. nach W.

Man hat auch

$\log \cot \varepsilon = 9,8894214 - 10$

$\log \tang \delta = 10,0111184 - 10$

$0,9005398 - 1$ von

$\log l = 3,3543389$

$\log k = 3,4537991$

giebt $k = 2843'',1 = 47' 23'',1$

$l = 2261,2$

$l - k = -581,9 = -(9' 41'',9) = ZPT$ (165)

$l + k = 5104,3 = 1° + 25' 4'',3 = SPK$

Wenn man diese beyden Winkel in Zeit der Uhr verwandelt, so findet sich, was die Uhr wies als der Stern durch die Mittagsfläche gieng. Diese Verwandelung verrichte ich so: Der Sterntag betrug $24^h - 118^s = 86282^s$; so viel ^{s} gehn auf 360°;

Also gehören $\frac{86282}{360}$ ^{s} für 1° und diese Zahl wieder mit 3600 dividirt giebt wieviel ^{s} für $1''$ gehören.

log 86282 = 4,9359202
abgez; log 360 = 2,5563025

2,3796177 gehört zu 239,67

abgez; log 3600 = 3,5563025

0,8233152 — 2 gehört zu 0,066575

addirt log (l + k) = 3,7079361

2,5312513 gehört zu 339,82

Noch zu 0,8233152 — 2
addirt log (k — l) = 2,7648484

1,5881636 gehört zu 38,740

Nähmlich 239,67 ſ gehörten für 1° und 0,06657 ſ für 1 Sec. alſo 339,82 ſ = 5 m 39,82 ſ für den Winkel SPR und 38,74 ſ für den Winkel ZPT; Nun kam der Stern nach ſeinem untern Durchgange durch die Mittagsfläche in S; und vor dem obern, in T; Man zieht alſo jede dieſer gefundenen Zeiten, von dem ab, was die Uhr wies als er in S und T war, ſo findet ſich folgendes: Die Uhr wies bey ſeinem untern Durchgange durch die Mittagsfläche 7 h 56 m 18,18 ſ beym obern 19 h 55 m 19,26 ſ.

Dieß Exempel ſteht beym Ludlam a. a. O. 141 §.

184. Die Aufgabe, (152) läßt ſich noch allgemeiner abfaſſen wenn man ſich ſtatt des Scheitelkreiſes jeden andern größten Kreis vorſtellt der den Meridian in K, L, den Horizont auf einer Seite des Meridians, 9. Fig. in N ſchneiden mag.

185 Er wird mit dem Meridiane den Winkel NKR; und mit dem Horizonte den Winkel KNR machen.

186. Einen solchen Kreis beschreibt jedes Fernrohr, das sich um eine feste Querare dreht; Denn weil wir überall im Mittelpuncte der Sphäre sind, so geht die Axe durch denselben und das Fernrohr dreht sich in einer Ebene in welcher der Mittelpunct ist.

187 Soll ein Fernrohr einen kleinern Kreis beschreiben, so kann es sich nicht in einer gegebenen Ebene drehen. Es müßte z. E. an einem Ende fest seyn und um dieses Ende herum geführt werden wie die gerade Linie die einen Kegel beschreibt, um des Kegels Spitze.

188. Von einem solchen größten Kreise (185) fängt Ludlam seine Untersuchung an, (131. §) davon (152) ein besonderer Fall ist. Wie man aber doch aus dem allgemeinen Satze den besondern herleiten muß, so hat es mir deutlicher geschienen wenn ich von dem letzten anfinge, der nun leichter allgemein zu machen ist.

Der Punct K kann sehr vielerley Lagen haben deren Unterscheidung so viel Fälle der allgemeinen Aufgabe giebt. Nach der Uebung die man mit der bisherigen besondern Aufgabe gehabt hat wird man diese Fälle in der allgemeinen leicht selbst unterscheiden.

Wie man die Lage eines grösten Kreises findet, in dem man einen Stern zweymahl beobachten kann?

189. KL sey die Hälfte eines größten Kreises der den Mittagskreis in K, L, schneidet. Es sey

PK = u; PKL = w; gegeben Imgleichen
PS = 90° — δ Man sucht dieses Abweichungskreises Winkel mit dem Mittagskreise.

Aufl Man fälle den Bogen PW, senkrecht auf KS; Im rechtwinklichten Dreyecke KPW, hat man die Hypothenuse KP; und den Winkel K; daraus findet sich

sin PW = sin w. sin u (rechtw. I.)
cot KPW = tang w. cos u (rechtw. VIIII.)

Nun im Dreyecke PWS

cos WPS = cot PS. tang PW (rechtw. V)
= tang δ. tang PW

190. Also hat man KPS = KPW + WPS;

191. Wenn man WT = WS nimmt, so hat das Dreyeck WTP; auch die Hypothenuse PT = PS; WPT = WPS; Also ist ein anderer Werth des gesuchten Winkels KPT = KPW — WPS

192. Dieser Werth wird verneint, wenn WPS > KPW; Allsdenn fällt PT auf die andere Seite des Meridians, nicht auf eine mit PS

193 Es ist also alles wie in 152; nur mit folgenden Verwechslungen.

dorten	α	90° — α
hier	w	u

194. Man nenne daher auch hier KPW = κ; WPS = λ; So ist $\cot PW = \frac{\cot u}{\cos \kappa}$ (rechtw. V)

also cos λ = tang δ. cos κ. tang u

195. Und KPS = κ + λ
KPT = κ — λ

196.

196. Wenn man also einen Stern in der Ebene K L zweymahl sehen kann so finden sich dieser Ebene Winkel mit dem Meridiane und dem Horizonte folgendergestalt:

I Man bemerke die Zeiten, wenn er in S und in T (unter und über dem Pole) erscheint. Der Zeiten Unterschied in Bogen des Aequators verwandelt, giebt den Winkel $SPT = 2\lambda$

II. Vermittelst übereinstimmender Höhen des Sterns suche man die Zeit wenn er durch Mittagsfläche gegangen ist; Der Unterschied dieser Zeit, von den Zeiten da der Stern in S und T war, giebt die Winkel RPS; RPT;
folglich ihre Nebenwinkel KPS; KPT;
Man hat also $KPS = \varkappa + \lambda$
aber auch $\frac{1}{2} SPT = \lambda$
also $KPS - \frac{1}{2} SPT = \varkappa = KPW$

III. Im rechtwinklichten Dreyecke WPS; hat man $WPS = \lambda$; $PS = 90° - \delta$, also (rechtw. V)
$\cot PW = \tang \delta$
$\cos \lambda$

IIII Im rechtw. Dr. KPW; hat man den genannten Winkel, (II) und eine Seite (III) also $\cot u = \cos \varkappa . \cot PW$
(194) oder $\cot u = \frac{\cos \varkappa . \tang \delta}{\cos \lambda} = \frac{\sin k}{\sin l} . \tang \delta$, wenn
k, l, die Ergänzungen von $\varkappa$; λ; sind.

V. Auch (rechtw. IIII.) $\cos w = \sin \varkappa . \cos PW$
oder auch $\sin w = \frac{\sin PW}{\sin u}$

also $\text{tang } w = \frac{\text{tang } PW}{\text{sin } u . \text{sin } z}$, aber $\text{tang } PW = \text{cos } z . \text{tang } u$

(IIII) daher $\text{tang } w = \frac{\cot z}{\text{cos } u} = \frac{\text{tang } k}{\text{cos } u}$

VI. Man ziehe ZN; so ist ZNK = p des größten Kreises Winkel mit dem Scheitelkreise durch seinen horizontalen Durchmesser. Dieser Winkel macht 90° mit KNR, des größten Kreises Neigung gegen den Horizont.

VII. Die Figur nimmt KNR gegen Norden spitzig an. Wäre dieser Winkel gegen Norden stumpf, so wird sein Cosinus oder sin p verneint. Nähmlich ZNK fällt allsdenn auf die entgegengesetzte Seite von ZN; wird also verneint, und bekömmt einen verneinten Sinus.

VIII. Im Dreyecke ZNK; ist ZN = 90°
NKZ = 180° — w; ZK = 90° — RK; und
sin NZ : sin NKZ = sin KZ : sin ZNK;
also $\text{sin } p = \text{cos } (\varepsilon + u) . \text{sin } w$

VIIII. Der Bogen NR ist das Maaß des Azimuths NZK; Man nenne ihn q; so ist im Dreyecke KNR; sin N : sin KR = sin K : sin NR also

$\text{sin } q = \frac{\text{sin } w . \text{sin } (\varepsilon + u)}{\text{cos } p}$ also aus (VIII)

$\text{sin } q = \text{tang } (\varepsilon + u) . \text{tang } p$

X. Wenn ein Fernrohr diesen Kreis beschreibt und auf die Querare um die es sich dreht senkrecht steht so steht diese Axe auf der Ebene des Kreises senkrecht.

Wenn

Wenn man sich also durch KL; einen größten Kreis, senkrecht auf KNL gesetzt vorstellt, so befindet sich die Queraxe, in der Ebene dieses Kreises.

Dieser Kreis macht mit KRL einen Winkel $= 90° + w$; mit KHL einen $= 90° - w$;

Die Queraxe befindet sich also in einer Ebene die mit der Mittagsfläche gegen Süden einen Winkel $= 90° - w$ macht.

In dieser Ebene, steht sie auf des Kreises KNL Ebene, durch seinen Mittelpunct senkrecht, und der Theil der Queraxe der vom Mittelpuncte südwärts geht macht mit dem Horizonte den Winkel $90° + p$ $=$ HNK;

XI. Wäre RKN ein stumpfer Winkel von Norden gegen Osten, so machte der Kreis KL einen spitzigen von Norden gegen Westen mit der Mittagsfläche. Dieser würde allsdenn w heissen und als verneint angesehn.

Eben so kann p verneint werden (VII)

In X muß man unter diesen Umständen diese verneinten Werthe brauchen.

197. Hat man einmahl aus Beobachtuugen die Lage des Kreises KL bestimmt den das Fernrohr beschreibt, so läßt sich daraus umgekehrt berechnen, wieviel ein Stern dessen Abweichung bekannt ist in dasselbe anders kömmt als in die Mittagsfläche.

Nun bedeuten nähmlich S, T, 9 Fig. die Stellen, in denen ein unbestimmter, gegebener Stern durch diese Ebene geht, (nicht der den man 196 brauchte); Seine Abweichung ist bekannt und u, w,

hat man (196 IIII; V) gefunden. Also findet man für diesen Stern tang k = cos u. tang w

sin l = tang δ. tang u. sin k

Daher KPS = 180° — (k + l)

KPT = l — k (195)

Diese Winkel in Zeit verwandelt, geben den Unterschied zwischen des Sterns Durchgängen durch diesen Kreis, und durch die Mittagsfläche.

198. Für einen Stern im Aequator ist l = o. Für einen dessen Abweichung = 90° — u; ist l = k also KP ϒ = o und er geht über dem Pole zugleich durch die Ebene KL, und die Mittagsfläche, nähmlich durch K wo beyde einander schneiden.

199. Wenn man nur die beyden Durchgänge in S und ϒ beobachtet hat, aber nicht weiß wenn der Stern durch die Mittagsfläche gegangen ist so fehlt in 196; II; SPK; man hat aber doch SPT; also auch P W (196; III) Dieses heisse h; so ist

$$\cot h = \frac{\text{tang } \delta}{\cos \lambda} \text{ oder, } \text{tang } h = \sin l . \cot \delta$$

Wenn λ nahe bey 90° ist, so giebt der letzte Ausdruck die Bequemlichkeit daß man gleich l, h, statt des Sinus u. der Tangente nehmen kann, wofern δ nicht gar zu klein ist.

Exempel zu 196.

200 Bey der vorigen Polhöhe (183) ging die Capelle, durch eine Ebene, unter dem Pole um 8 h 3 m 56 s über dem Pole um 19 h 53 m 43, 25 s; Aus übereinstimmenden Höhen fand sich, daß der

Stern

Stern um 19 h 55 m 54,75 s durch die Mittagsfläche ging. Die Uhr wies mittlere Zeit, wie daraus erhellt wenn sie die folgende Nacht als die Capelle wieder unter dem Pole durchging 8h 0m 0s wies.

Also gehört S P T 9 Fig zu 11 h 49 m 47, 25 s
die Hälfte davon S P zu 5 54 53,625

Diese mittlere Zeit in Bogen des Aequators verwandelt giebt $\lambda = 88^\circ 57' 58''$
also $l = 1^\circ 2' 2'' = 3722''$

Ferner kam vermöge der Beobachtungen, der Stern in T eher als in die Mittagsfläche um 2 m 11,5 s; soviel beträgt der Winkel T P K in mittlerer Zeit. Diese Zeit in Bogen verwandelt giebt
$KPT = 32' 57'',5$

Also $KPT + TPW = u = 89^\circ 30' 55'',5$
und $k = 29' 4'',5 = 1744'',5$

Nun nehme ich an daß sich die Sinus der kleinen Winkel, wie ihre Bogen verhalten, also nach (1111)

$\log k = 3,2419199$
$\log \text{tang } \delta = 10,0111184$

$\log l = 13,2530383$
$3,5707764$

$\log \cot u = 9,6822619$
giebt $u = 64^\circ 18' +$

Nun nach (V)
$\log k = 3,2419199$
$-\log \cos u = -9,6371484 + 10$

$\log w = 3,6047715$
$w = 4025'',1 = 1^\circ 7' 5'',1$

Fer-

Ferner nach (VII) $\varepsilon + u = 116^\circ 31' = 180^\circ - (63^\circ 29)$ wovon Cosinus und Tangente verneint sind, der Punct K fällt also vom Scheitel gegen Süden, und p ist verneint (VIII); daher in (VIIII) sin q, das Product aus zwo verneinten Grössen, bejaht und der Winkel N Z K oder der Bogen R N spitzig, von Norden gegen Osten. Die Rechnung steht so:

log w $= 3,6047766$ dazu
add. log cos $(\varepsilon + u) = 9,6497807 - 10$
log p $= 3,2545573$ dazu
add. log tang $(\varepsilon + u) = 0,3019474$
log q $= 3,35565047$

also $p = -1797''$ oder $29' 57''$ von ZN nach Süden
$q = 3601'',7 = 1^\circ 0' 1'' 7$ von Norden gegen Osten.

Für einen Stern im Aequator, wäre KPT $= -29' 4'',5$ (198) Er ginge also durch diese Ebene, so viel Zeit als dieser Bogen beträgt, nach seinem Durchgange durch die Mittagsfläche.

Der Stern dessen Abweichung $25^\circ 42'$ ist, geht über dem Pole in der Ebene durch die Mittagsfläche.

Das Exempel ist auch Ludlams 147. §. Er findet einiges in Kleinigkeiten anders; Nach ihm wäre $k = 29' 3''$; $l = 1^\circ 2' 1''$; $90^\circ - u = 25^\circ 40' 10''$ $p = 29' 58''$; $q = 59' 59'',2$

Diese Unterschiede rühren daher weil er mit den Sinussen und Tangenten selbst gerechnet hat und sie also für die Winkel an denen Secunden hängen, erstlich hat suchen müssen. Des Sterns Abweichung

ist

ist von ihm auch genauer so wie sie in (183) angegeben wird gebraucht worden.

Wie man die Lage eines grösten Kreises findet wenn man nicht weiß zu welcher Zeit der Stern, den man in ihm zweymahl sahe, durch die Mittagsfläche gegangen ist. (199)

201. Man könnte, aus übereinstimmenden Höhen eines andern Sterns, berechnen, wenn derselbe durch die Mittagsfläche gegangen ist; Wüßte man nun beyder Sterne Rectascensionen, so liesse sich daraus finden, wieviel dieser andere eher oder später durch die Mittagsfläche gegangen ist als jener erste (199) Man hätte also die Zeit wenn der erste durchgegangen ist und so liesse sich die Auflösung (196) vollenden.

Hiebey müßte man aber, beyder Sterne Rectascensionen, oder eigentlich derselben Unterschied, sehr genau wissen. Fehler die man hierinne begienge gäben auch beträchtliche Fehler in der Zeit die man daraus suchte, und in den übrigen gesuchten Grössen.

202 Wenn man die Abweichungen der Sterne gebraucht so geben kleine Fehler derselben, nicht so beträchtliche Folgen in den Grössen, die man hier sucht. Dieses führt auf nachstehende Untersuchung

203. Man hat mit einem Sterne, 10. Fig. die 10 f.
Beobachtungen (199) angestellt. Von einem andern bekannten Sterne, weiß man aus übereinstim-

menden Höhen, die Zeit, wenn er in der Mittagsfläche war; Man hat auch eben denselben in der Ebene deren Lage gesucht wird, in Q; beobachtet. Daraus sucht man die Lage dieser Ebene.

Die Figur 9 Fig stellt ein Stück der vorhergehenden, auf eine solche Art vor daß man die Dinge von den hie die Rede am bequemsten sehen kann.

P H ist der Bogen des Meridians, der vom Nordpole nach Süden im Horizonte geht, K Q W S, ein Bogen des größten Kreises dessen Lage gesucht wird, und so sind P, H, K, W, S, eben die Puncte der vorigen Figur; von neuem kömmt Q dazu. S ist hier nur mehrerer Deutlichkeit wegen beygezeichnet, wird sonst, jezo nicht gebraucht.

204. I Aus 199; ist P W gegeben $= h$
Des zweyten Sterns Abweichung sey θ; so ist
$PQ = 90° - \theta$;

II Aus diesen beyden Dingen, findet sich im Dreyecke Q P W; (rechtw. V)
$\cos QPW = \cot PQ . \operatorname{tang} PW$
oder $\cos QPW = \operatorname{tang} \theta . \operatorname{tang} h$

Wenn h klein ist und θ nicht nahe an 90°; so kann man in dieser Formel, h statt tang h brauchen und den sin (90° — Q P W) den man so findet, selbst für 90° — Q P W nehmen.

III Weil man weiß wenn der zweyte Stern in der Mittagsfläche war, und wenn er in Q war, so giebt der Unterschied dieser Zeiten den Winkel
$KPQ = e$;

IIII. Man hat also K P W oder f = Q P W + e;

V. Liegen Q und W nicht auf einer Seite der Mittagsfläche, so sieht man e als verneint an.

VI; Also im Dreyecke P K W (rechtw. V)
cot P K = cot P W. cos K P W oder u; w; in den Bedeutungen (189) gebraucht cot u = cot h, cos f

VII. Auch so (rechtw. IIII)
cos w = sin f. cos h

VIII. Aus u; w; hat man p; q (196; VIII; VIIII;)

205. Exempel Man beobachtete die Capelle wie in (200) in S und T; aber man wußte nicht wenn sie in der Mittagsfläche gewesen war.

Ferner beobachtete man α des Pegasus in Q, um 13 h 51 m 28 s; Aus übereinstimmenden Höhen, wußte man daß dieser Stern um 13 h 50 m 32 s in der Mittagsfläche war. Seine Abweichung ist 13° 57′ 20 also nach (200) u. (199)

log l = 3, 5707764
log cot δ = 9, 9888816 — 10

log h = 3, 5596580
h = 3627″,9 = 1° 0′ 27″,9

Aus 200 erhellt daß P W ostwärts der Mittagsfläche liegt.

Der Stern des Pegasus, kam 56 s später in Q als in die Mittagsfläche. Diese mittlere Zeit, in Bogen des Aequators verwandelt giebt 14′ 2″,3; Soviel beträgt der Winkel K P Q; liegt aber west-

wärts der Mittagsfläche und ist als verneint anzusehen (204; V)

Nun aus 204; II;

$$\log h = 3,5596580$$
$$\log \operatorname{tang} \theta = 9,3951538 - 10$$
$$\log (90° - QPW) = 2,9548118$$

gehört zu 901'',2 also

$$90° - QPW = 0°\ 15'\ 1'',2$$
$$QPW = 89\ 44\ 58,\ 8$$
$$+c = -\ \ 14\ \ 2,\ 3$$
$$f = 89\ 30\ 56,\ 5$$
$$90° - f = 29\ \ 3,\ 5$$
$$= 1743,\ 5$$

Um den Logarithmen von col f genau zu finden verfahre ich so: Weil man den kleinen Winkel $90° - f$ für seinen Sinus annehmen darf; so suche ich was diesem Winkel, in Decimaltheilen des Halbmessers ausgedruckt, für ein Logarithme zugehört. Das wäre auch der Logarithme seines Sinus, für den Halbmesser $= 1$; Weil ich aber den Logarithmen für den Halbmesser der Tafeln suche, nähmlich den Logarithmen dieses Sinus wie er in die Tafeln könnte gesetzt werden, so addire ich 10 zu dem gefundenen Logarithmen. Die Rechnung sieht so aus

$$\log 1'' =$$

log 1'' = — 5, 3144251
log 1743,5 = + 3, 2414220

log coff = — 2, 0730031 für Sin tot = 1
+10

log tab cof f = + 7, 9269968 abgezogen von 10 +
log tab tang h = 18, 2452832

log tab tang u = 10, 3182864
u = 64° 19' +

Den letzten Theil der Rechnung habe ich so bewerkstelligt. In Gellibrands Tafeln, gehn die Bogen jedes Grades durch alle Vielfache von 36''; und der Tangenten Logarithmen finden sich da bis auf die Ordnung — 10; Ich habe daraus, aus dem Logarithmen der Tangente von 1° und von 1° 0' 36''; den Logarithmen der Tangente von 1° 28'' gesucht den ich statt log tang h brauche. Zu ihm mußte ich 10, als den Logarithmen des Halbmessers der Tafeln addiren wenn ich log tab tang u haben wollte.

Auch durch Proportionaltheile berechne ich aus Gellibrands Tafeln
log cof h = 9, 9999335
log sin f = 9, 9999845 wo f = 89° 31'

log cof w = 9, 9999180
giebt w = 1° 6' + und aus Gellibrands Tafeln
w = 1° 6' 36'' = 3996''

Da diese Werthe von u und w den (200) so nahe kommen, so ist klar daß sie auch p u. q wie dorten geben werden.

Wenn ich hier eben so wie in (29c) rechne so finde ich p = — 180 1′ 11″ = 30° 1′ 11″,1 von Z N südwärts; und q = 360 7′ 11″,2 = 1° 0′ 7″ 2

Einer Verticalfläche Winkel mit der Mittagsfläche, durch zweener bekannten Sterne Durchgänge durch sie zu finden.

12ſ. 206. I PZH Fig 12 gehe vom Pole nach Süden, HZK = Φ liege von Süden nach Osten.

II Man bemerke den Augenblick wenn ein bekannter Stern in die Verticalfläche kömmt welches in S geschehe.

III In demselben Augenblicke befinde sich ein anderer in M; der Winkel S P M = f ist bekannt er ist der Unterschied der Rectascensionen beyder Sterne.

IIII Einige Zeit darauf kömmt eben dieser Stern auch in die Verticalfläche, in K; also hat sich sein Abweichungskreis aus der Lage P M in die Lage PK gedreht; und wenn man weiß wieviel Zeit dieser Stern in K nach dem ersten in S erscheint, so giebt diese Zeit in Bogen verwandelt, den Winkel KPM = g;

V. Also weiß man SPK = f — g

VI Nun sey ZP S = k — l (159; VI), wo man Φ nicht weiß also auch nicht k, l;

VII So ist ZP K = k — L

wo sin L = tang D. cot ε sin k

wenn des zweyten Sterns Abweichung D heißt.

VIII; Also ist SPK = l — L; das ist dieser beyden unbekannten Winkel Unterschied ist bekannt (V)

VIIII

VIIII. Aber es ist auch (159. V)
$\sin L = \text{tang } D . \cot \delta . \sin l$
oder der beyden unbekannten Winkel Sinusse haben eine gegebene Verhältniß.

X. Lassen sich also aus den Bedingungen (VIII; VIIII) die beyden unbekannten Winkel finden, so giebt sich aus jedem von ihnen k (159; V) und daraus φ.

207. Das führt also auf folgende Aufgabe.
Von ein paar unbekannten Winkeln weiß man ihren Unterschied $l - L = 2p$; und die Verhältniß ihrer Sinusse, $\sin l = e . \sin L$; daraus soll man die Winkel finden.

Aufl. Man suche die Summe der beyden Winkel, $2y = l + L$; so ist $l = y + p$; $L = y - p$; also
$\sin l = \sin y . \cos p + \cos y . \sin p$
$\sin L = \sin y . \cos p - \cos y . \sin p$
Die beyden Sinus addirt u. abgezogen und ihre Summe mit ihrem Unterschiede dividirt kömmt
$$\frac{\sin l + \sin L}{\sin l - \sin L} = \text{tang } y . \cot p$$
Aber was linker Hand steht ist $\frac{e+1}{e-1}$ also hat man
$$\frac{e+1}{e-1} . \text{tang } p = \text{tang } y$$

209. In der Anwendung auf (206) nenne man $f - g = 2p$ (206; V) auch ist $e = \text{tang } \delta . \cot D$; also

$$\frac{\text{tang}\,\delta + \text{tang}\,D}{\text{tang}\,\delta - \text{tang}\,D}.\ \text{tang}\,p = \text{tang}\,y$$

Wenn man die Tangenten, durch Sinus und Cosinus ausdruckt, so findet sich

$$\text{tang}\,\delta \pm \text{tang}\,D = \frac{\sin(\delta \pm D)}{\cos\delta\cos D}$$

$$\text{Also}\ \frac{\sin(\delta + D)}{\sin(\delta - D)}.\ \text{tang}\,p = \text{tang}\,y.$$

209. Aus y (208) findet man l, L, (207) und folglich (206; X) $\sin k = \cot\delta.\ \text{tang}\,\varepsilon.\ \sin l$

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{tang}\,k}{\sin\varepsilon}$$

210. Dieses gilt, die Verticalfläche mag soviel man will von der Mittagsfläche unterschieden seyn. Bey der gewöhnlichen Anwendung aber, wird man diesen Unterschied nur gering annehmen dürfen.

211. Allsdenn ist p klein, denn wenn beyde Flächen zusammen fielen, wäre $p = 0$.

Dem ohngeachtet, wird y groß werden, wenn die beyden Abweichungen in (208) nach einerley Seite des Aequators liegen und nicht sehr unterschieden sind.

Dieses also zu vermeiden, wähle man ein paar Sterne, deren Abweichungen sehr unterschieden allenfalls wohl entgegengesetzt sind.

212 Werden allsdenn p, y, klein genug so hat man

$$\frac{\text{tang}\,\delta + \text{tang}\,D}{\text{tang}\,\delta - \text{tang}\,D}.\ p = y.$$

Folg-

Folglich $l = \frac{\text{tang } \delta}{\text{tang } \delta - \text{tang } D} \cdot 2p$

$= \frac{\text{sin } \delta . \text{ col } D}{\text{sin } (\delta - D)} \cdot 2p$

213 I Und wenn man immer noch die Winkel selbst statt ihrer Sinusse und Tangenten setzen darf, so ist (209)

$k = \frac{\text{col } \delta . \text{ col } D . \text{ tang } \varepsilon}{\text{sin } (\delta - D)} \cdot 2p$

und $\varphi = \frac{\text{col } \delta . \text{ col } D}{\text{sin } (\delta - D) . \text{ col } \varepsilon} \cdot 2p$

Diese Formel steht beym la Lande Astron. 2086 I Ausg. 2607 II. Ausg. ohne Beweis, und ohne Anzeige der die wahr bliebe wenn auch die Winkel nicht so klein wären. (208)

II) Bedeutet t die Zeit zwischen den Durchgängen durch S u. K in Sternzeit ausgedruckt so kann man $2p = 15t$ setzen, nähmlich 2 p hält 15 mahl soviel Minuten u. Secunden des Bogens als t Minuten u. Secunden der Zeit hält

Und weil diese Zwischenzeit nur klein seyn darf, so könnte sie auch in anderer Art von Zeit z. E. in mittlerer gegeben seyn u. es liesse sich doch ohne grossen Fehler 15 t statt 2 p setzen.

So hat de la L. die Formel ausgedruckt, ohne diese Verwandlung anzuzeigen oder zu rechtfertigen.

III. Eine gleichgültige findet sich in Hr. Joh. Bernoulli Recueil pour les Astronomes T. I. p.

50; nebst ein paar andern hieher gehörigen Aufgaben; z. E. Durchgänge zweener Sterne, auf eine ähnliche Art zu brauchen, wenn das Fernrohr genau Süden im Horizonte wiese, aber eine geneigte Ebene beschriebe, weil seine Querare nicht horizontal wäre. Dieses würde sich hier aus (116) herleiten lassen, ich halte aber nicht für nöthig solches, oder andere ähnliche Untersuchungen noch beyzubringen.

IIII Denn ich würde immer, die Stellnng des Fernrohrs in der Mittagsfläche zu prüfen, übereinstimmende Höhen wählen (98)

V. In den Abh. der K. Schwed. Ak. d. W. für das Jahr 1745; im 7 Bande meiner Uebersetzung, lehrt die letzte vom Pater Elvius, wie er sie überschrieben hat: die Mittagslinie durch Beobachtung der geraden Aufsteigungen zweener Sterne finden.

Eigentlich ist es die hier gelehrte Untersuchung einer Verticalfläche, was für einen Winkel sie mit der Mittagsfläche macht. Elvius hat aber die Methode nur angezeigt nicht ausgeführt, und sich überhaupt sehr kurz und dunkel ausgedrückt. Ich will daher zu Erläuterung des Gegenwärtigen das Exempel das er giebt beybringen, zumahl da es dorten durch einige Druckfehler verstellt ist.

VI. Er beobachtete d. 4. Dec. in einer Verticalfläche die wie er sagt ziemlich genau nach dem Meridian gerichtet war

δ des Orion um 11 h 46 m 26 s
γ der Zwillinge 11 51 50

also (206 IIII) g = 5 24
in mittlerer Zeit, welche die Uhr wies.
Den Unterschied der Rectaſcensionen beyder Sterne nimt E. in mittlerer Zeit 4 m 8 s = f (206; III)
Also wird das dortige f — g hier = — (1 m 16 s)
Daß es verneint ist rührt daher weil in der Figur u. Rechnung (206) der Stern der zuerst durch die Mittagsfläche ging, der nächste beym Pole war, hie der entfernteste ist.

In Theilen des Kreises ist

f — g = — 19′ = 2 p

Weil der Stern des Orion nur einen sehr geringen Abstand vom Aequator hat (in den Abh. steht durch einen Schreibfehler: vom Meridiane) so nimmt E. stillschweigend seine Abweichung = o an, soviel als würde in meinen Formeln δ = o gesetzt.

VII. Für diese Voraussetzung wird
in (212) l = o;
in (213) $k = -\cot D \tang \varepsilon \cdot 2p$

$$\varphi = -\frac{\cot D}{\cot \varepsilon} \cdot 2p$$

VIII Dieß sind auch die Regeln die Elvius giebt nur daß er nicht die kleinen Bogen selbst, sondern ihre Sinusse u. Tangenten nennt.
Er setzt D = 16° 35′ 30″
ε = 59 20
Ich rechne also folgender gestalt

log cot

log cot $16^\circ 35' 24'' = 10,5258961 - 10$
log tang 59 20 0 $= 10,2269673 - 10$
log 19 $= 1,2787536$

$2,0316170$

giebt $k = 107',55$; dieser Werth ist bejaht, weil 2p verneint ist. Er giebt nach (206; VI) den Stundenwinkel um den sich der Stern des Orion eher in der Verticalfläche befand als in der Mittagsfläche $ZPS = 1^\circ 47' 33''$; in mittlerer Zeit 7 m 8 ſ 39 t;

Weil E. diesen Stern im Aequator annimmt so druckt er den Satz so aus: Soviel Zeit vor dem wahren Mittage, kömmt die Sonne am Aequinoctialtage in diese Verticalfläche.

E. giebt $ZPS = 1^\circ 52'$ an und in Zeit 7 m 26 ſ welches unter sich übereinstimmt aber nicht mit meiner Rechnung die doch aus eben den gegebenen Grösſen geführt ist. Also hat sich wohl einer von uns beyden verrechnet.

Wenn ich den Winkel der Verticalfläche mit der Mittagsfläche aus (209) berechne; und log tang k durch Proportionaltheile berechne, so finde ich

$10 + \log \text{tang } k = 18,5074334$
$\log \sin \varepsilon = 9,9345738$

$\log \text{tang } \varphi = 8,5728596$

Giebt den Winkel 2° und zwischen 8 u. 9 Minuten.
E. findet ihn $2^\circ 11'$;
Der Winkel geht von Süden nach Osten, weil seine Tangente bejaht ist. Eben das zeigt auch was hie gleich folgt, (214; III;)

214 Weil in dieser Untersuchung φ von Süden gegen Osten ist angenommen worden so bekömmt es einen verneinten Werth wenn dieser Winkel von S. gegen W. fällt. Dieses kann auf zweyerley Art geschehn. Man bemerke, daß δ die Abweichung des Sterns bedeutet der zuerst durch die Fläche geht.

I) Wenn 2p einen verneinten Werth bekömmt, da geht durch die Fläche zuerst der Stern der die grösste nordliche Abweichung hat, darnach der die kleinere, oder eine südliche hat, der Bogen welcher die Zeit zwischen ihren Durchgängen mißt ist grösser als der Unterschied der Rectascensionen.

II) Wenn 2p bejaht ist, aber sin(δ — D) verneint. Da geht zuerst der Stern durch, der die kleinste nordliche Abweichung oder eine südliche hat, und der Bogen welcher der Zeit zwischen ihren Durchgängen zugehört, ist kleiner als der Unterschied der Rectascensionen.

III. Geht aber der Stern der die kleinste Abweichung hat zuerst durch und ist der Bogen welcher der Zwischenzeit zugehört grösser als der Unterschied der Rectascensionen so sind zugleich 2p und sin(δ — D) verneint, also φ bejaht oder ostlich.

215 Man muß bey diesem Verfahren den Gang der Uhr sehr genau kennen, und die Zeiten der Durchgänge sehr genau beobachten. Wenn die Uhr mittlere Zeit weist so giebt ein Fehler einer Secunde Zeit, ohngefähr $15''$ im Bogen Fehler.

216 Ich würde daher von den beyden Ausdrükkungen (212) lieber die durch 2p brauchen, und die-

sen Bogen aus Zeit der Uhr berechnen nach der Art, nur umgekehrt wie in (183) Winkel in Zeit der Uhr sind verwandelt worden.

217 Wüßte man, vermöge eines solchen Verfahrens, oder eines gleichgültigen z. E. (98) Φ, so liesse sich folgende Frage beantworten:

Zweener Sterne Abweichungen sind gegeben, sie mögen heissen wie die in 206;

Auch ist der Unterschied ihrer Rectascensionen gegeben er mag ebenfalls f heissen.

Man hat die Zeit beobachtet wenn der erste in der Verticalfläche erschien.

Man will daraus berechnen wie lange nach ihm, der zweyte in dieser Verticalfläche erscheinen wird.

Das heißt: Man sucht g (206)

Aufl. Weil in (213) $2p = t - g$ (208)

So ist $f - g = \frac{\text{sin}\,(\delta - D).\ \text{cos}\,\varepsilon}{\text{cos}\,\delta\ \text{cos}\,D}$

wo man leicht, die einzige unbekannte Grösse, g, findet.

Wenn man am verticalen Faden eines Fernrohres der nicht genau in der Mittagsfläche ist, zweene Sterne nach einander, in etwas unterschiedenen Höhen siht, den Unterschied ihrer Rectascensionen zu finden.

218. Wenn der Faden genau in der Mittagsfläche ist so giebt die Zeit zwischen den Durchgängen den Unterschied der Rectascensionen.

219.

219. SK 12 Fig. sey dieser Faden etwas auser 12ſ.
der Mittagsfläche, der erste Stern erscheine in S,
der zweyte, in einer Zeit die dem Stundenwinkel c
zugehört nach ihm, in K;

220. Ich nehme an man weiß PZ, PS = 90° — d
ZS = 90° — h; und ZPS = b,

Den letzten Winkel, kann man wissen wenn man weiß was die Verticalfläche durch den Faden, für einen Winkel mit der Mittagsfläche macht (140; 162) oder man weiß die Zeit wenn der erste Stern durch die Mittagsfläche geht aus übereinstimmenden Höhen, und beobachtet wenn er in S erscheint, so giebt sich auch ZPS.

221. Ich nehme jezo an, beyde Sterne sind auf der Ostseite der Mittagsfläche und ZH geht nach Süden.

222. Von dem Augenblicke an, als der erste in S war, bis auf den Augenblick wenn der zweite in K ist hat sich der erste um den Stundenwinkel c bewegt (219) und seine Entfernung von der Mittagsfläche ist im letzten Augenblicke b — c (220)

223. Ist dieses was Verneintes, so ist er schon durch die Mittagsfläche gegangen und befindet sich westwärts.

223. Der jezo noch unbekannte Winkel SPK heisse x;

So gehört die Zeit vom Augenblicke da der zweyte Stern in K ist bis zu dem da er in die Mittagsfläche kömmt dem Stundenwinkel b + x (220)

225. Und in dieser Zeit wird des ersten Sterns

Ab-

Abstand von der Mittagsfläche (222)
$b - c - (b + x) = - (c + x)$
Nähmlich sein Abstand ist $c + x$ westlich.

226. Das aber ist der Abstand beyder Sterne auf dem Aequator, oder der Unterschied ihrer Rectascensionen.

227. Den Winkel x findet man so: Auf den Stundenkreisen, nehme man $PL = PK$; Weil der zweyte Stern bald nach dem ersten ins Fernrohr kömmt so ist SPK klein, und man kann daher KL als eine kleine gerade Linie annehmen, die bey L einen rechten Winkel macht.

228. Das Stück des Fadens zwischen beyden Sternen, $SK = k$ giebt eine andere kleine gerade Linie, die als bekannt angenommen wird

229. So ist $KL = k. \sin S;$
$= \frac{k. \sin b. \cos \varepsilon}{\cos h}$ aus ΔPZS

230. Der Winkel x aber ist $= LK : \sin PK$ wo man ohne merklichen Irrthum PS statt PK braucht; So ist (220)
$x = \frac{k. \sin b. \cos \varepsilon}{\cos h. \cos \delta}$

231. Also ist der Unterschied der Rectascensionen (226; 230)
$c + \frac{\sin b. \cos \varepsilon. k}{\cos h. \cos \delta}$

232. Würde der erste Stern im Faden erst nach

sei-

seinem Durchgange durch die Mittagsfläche gesehen so wäre b (220) verneint, und der letzte der beyden Theile (231) würde von c abgezogen.

233. Diese Formel steht ohne Beweis beym de la L. Astr. 2608 der II. Ausg. In der ersten ist sie nicht.

Die Sterne die hier betrachtet werden haben nicht sehr unterschiedene Abweichungen, daß sie beyde im unverrückten Fernrohre gesehn werden und SK (228) klein ist.

In der vorigen Aufgabe 206; brauchte man Sterne, deren Abweichungen weit unterschieden waren. (211)

Wie sich Azimuth und Höhe mit einander ändern.

234 Aus 9; II; wird

$$\cos\alpha = \frac{\sin\delta}{\cos\varepsilon.\cos\eta} - \tan\varepsilon.\tan\eta$$

Das giebt differentiirt nach gehöriger Rechnung

$$\sin\alpha\ d\alpha = \frac{\sin\varepsilon - \sin\delta\sin\eta}{\cos\varepsilon.\cos\eta^2}.\ d\eta$$

235 Man bemerke hiebey daß α den Winkel PZS bedeutet, den der Verticalkreis mit dem Meridiane gegen Norden macht.

Dieser Winkel wächst also von Aufgange an, so lange der Zähler rechter Hand bejaht ist, und so lange nimmt sein Nebenwinkel ab, den der Verticalkreis mit dem Meridian gegen Süden macht.

236 Ist also die Polhöhe grösser als die Abweichung, so wächst α beständig, der Verticalkreis dreht sich bey zunehmender Höhe so, daß er immer kleinere Winkel mit dem Meridian nach Süden zu macht.

Allsdenn ist auch $90° - \varepsilon < 90° - \delta$ oder $PZ < PS$ oder der Stern geht durch den Meridian in einer Stelle die von Z nach A zu liegt, südwärts.

237 Ist aber die Abweichung grösser als die Polhöhe, so ist $PZ > PS$ und der Stern geht in einer Stelle durch den Meridian die von Z nach P zu liegt, nordwärts.

238 Wenn in diesem Falle, kleine östliche Höhen des Sterns klein genug sind daß $\sin\delta . \sin\eta < \sin\varepsilon$; so wächst α indem diese kleinen östlichen Höhen wachsen; oder der Verticalkreis dreht sich so daß PZS wächst.

Indem aber diese Höhen wachsen, wird eine kommen, die $\sin\delta . \sin\eta = \sin\varepsilon$ macht. Allsdenn ist α am größten, und nimmt für die folgenden grössern Höhen wieder ab;

Oder, der Verticalkreis fängt an, sich von dieser Stelle, wo er den größten nordlichen Winkel gemacht hatte, wieder gegen den Meridian nordwärts zu drehen, bis er bey des Sterns Durchgange durch den Meridian, in die Mittagsfläche fällt.

239 Die Bewegung des Sterns also, da sein nordliches Azimuth eine Zeitlang wächst, am größten wird, u. wieder abnimmt, liesse sich so benennen wie man die Planeten, rechtgängig, stillstehend, rückgängig, nennt.

240

240 Bey einem Sterne der nicht untergeht kann man sich dieselbe leicht so vorbilden: Weil sein ganzer Parallel über dem Horizonte liegt so stelle man sich einen Scheitelkreis vor der diesen Tagekreis auf der Ostseite berührt.

Wenn nun der Stern von seiner geringsten Höhe an, aus dem Meridian aufwärts steigt so wächst sein nordliches Azimuth bis an diesen Berührungspunct und nimt von da an wieder ab.

241 Wenn man in 9; II; statt $\sin \eta$ den Werth $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta}$ setzt so findet sich dieses größten Azimuths Co-

sinus $= \frac{\cos \eta \sin \delta}{\cot \varepsilon}$ wo η die nur angezeigte Höhe bedeutet. Der Sinus dieses größten Azimuths ist $\frac{\cos \delta}{\cot \varepsilon}$

242 Aus 9; I; findet man für diese Höhe den Cosinus des Zeitbogens welcher dem größten Azimuth zugehört $\tang \varepsilon \cot \delta$

243 Und aus 9; III; den parallactischen Winkel allemahl $= 90°$. Welches so viel ist als: der Scheitelkreis berührt des Sterns Parallel, denn allsdenn, fällt ein Element von ihm, mit des Parallelkreises Elemente zusammen, auf jedes Element des Parallelkreises aber, steht der Stundenkreis senkrecht. Daher ist dieses schon (24) gefunden worden.

244. Aus der Polhöhe und eines Sterns Abweichung weiß man also wenn er sein größtes Azimuth bekömmt, und wie hoch er allsdenn steht.

Beobachtet man seine Höhe und vergleicht sie mit der auf erwähnte Art berechneten, so giebt der Unterschied die Refraction. Dieses Mittel schlägt der Hr. v. Maupertuis vor die Refraction zu finden. Astr. Naut. Probl. 9.

Ich sehe nicht was es für eine vorzügliche Bequemlichkeit hat als etwa die, daß der Stern da seine Höhe am schnellsten ändert.

Wie der Schatten eines lothrechten Stifts rückwärts geht.

245 Jedem Orte in der nordlichen Hälfte der heissen Zone, wiederfährt es, daß die Sonne mehr nordliche Abweichung bekömmt, als seine Polhöhe beträgt. Also zeigt sich ihm die angeführte Veränderung des Azimuths, selbst durch den Schatten eines aufgerichteten Stifts.

Dieser Schatten wird sich vom Aufgange der Sonne, so lange das nordliche Azimuth wächst, gegen Norden drehen, wenn es am grösten ist gleichsam stille stehen, und von da an gegen Süden drehen.

246 Diese Begebenheit ist als eine eigne Merkwürdigkeit der heissen Zone, von einigen Schriftstellern angezeigt worden; vom Varenius Geogr. Sect. VI. cap. 27. prop. 13 u. Wolf; Geogr. lat. 171. El. Math. Tom. IIII. Umständlich untersucht dieselbe: dissertatio astronomico geographica, de Solis et vmbrae stili retrogradatione, singulis aliquando diebus, in quibusdam terrae locis con-

conſpicua; zu Gröningen 1760 unter Frid. Adam Widder von Enno Rypma vertheidigt.

247 Man ſuche den halben Tagebogen der Sonne wenn ſie eine Abweichung hat bey der das Angezeigte ſtatt findet; dieſen Bogen ſo wohl, als den deſſen Coſinus = tang ε cot δ iſt verwandele man in Zeit und ziehe den letzten von dem erſten ab; ſo giebt ſich, wie lange Zeit vom Aufgange an, das nordliche Azimuth der Sonne wächſt, oder der Schatten ſich gegen Norden dreht.

Wenn dieſe Zeit vorbey iſt, nimmt das nordliche Azimuth wieder ab, und der Schatten dreht ſich gegen Süden.

Dieſes dauert bis an den Mittag, da die Sonne dieſem Orte nordwärts erſcheint.

248 Die Begebenheiten nachmittage, ſind den vormittägigen folgendergeſtalt entgegen geſetzt:

Wenn die Sonne durch den Meridian in die weſtliche Hälfte der Himmelskugel kömmt, ſo muß alſo ihr nordliches Azimuth nothwendig wachſen, denn im Meridian war es = o;

In den Formeln 9;11, u. ſ. w. könnte man dieſes Azimuth wie es weſtwärts fällt, als verneint anſehen, weil man es bey dieſen Formeln oſtlich annahm.

Ohne ſich aber mit den Folgen hieraus zu bemühen, iſt gleich aus Betrachtung der täglichen Bewegung offenbahr, daß das nordliche Azimuth weſtwärts wachſen wird, bis von Mittage an die Zeit verfloſſen iſt, welche dem Bogen zugehört, deſſen

Cosinus tang ε cot δ ist; allsdenn nimmt es wieder ab, bis zum Untergange.

249 Der Schatten wird also nachmittage, sich aus der Mittagslinie in der östlichen Hälfte des Horizonts nordwärts drehen, beym grösten Azimuth stehn bleiben, und von da an sich wieder südwärts drehn.

250 Für einen Ort der südliche Breite hat, darf man nur, annehmen P bedeute den Südpol, und so darf man nur, in allen bisherigen Sätzen, Süden statt Norden, und N statt S setzen.

251 So sind in angef. Dissert. Exempel für Batavia berechnet wo die südliche Polhöhe 6° 1/5′ ist. Wenn die südliche Abweichung der Sonne 8° 56′ ist, so geht daselbst der Schatten vormittage 3 St 3 M rückwärts und eben so lange vorwärts. Da es sich nachmittage eben so verhält, so ist an diesem Tage der Schatten zu Batavia so lange rückgängig als vorgängig.

Erinnerung wegen des Bisherigen.

252 Jeder Stern, wie ihn die tägliche Bewegung herumführt ist im Meridiane einmahl am höchsten, das nennt man gewöhnlich seine Mittagshöhe, und ein Stern der auf und untergeht, wird von uns nur das einzigemahl im Meridian gesehen.

Jeder Stern kömmt aber auch auserdem noch einmahl in die Mittagsfläche, unter unserm Horizonte, wenn er zu denen die auf u. untergehen gehört, oder darüber, wenn er nicht untergeht; Im ersten

Falle

Falle steht er am tiefsten unter dem Horizonte, im zweyten, am wenigsten darüber erhoben.

Wenn er nun aus dieser seiner niedrigsten Stellung im Meridiane, durch die tägliche Bewegung geführt wird, so steigt er auf der Ostseite des Meridians, und wenn man sich einen Scheitelkreis der durch ihn gelegt ist, immer mit ihm fortgehend vorstellt, dreht sich dieser Scheitelkreis um das Zenith dergestalt, daß er, indem der Stern steigt, immer grössere u. grössere Winkel mit dem Meridiane macht, bis an die Stellung des Sterns, in der Scheitelkreis und Parallel des Sterns, einander berühren. Von da an fängt der Scheitelkreis wieder an kleinere Winkel mit dem Meridiane zu machen.

Das geschiht also bey allen Sternen. Wenn aber dieser Berührungspunct unter den Horizont fällt, so ist uns dieses Rückgehen des Scheitelkreises so wenig sichtbar als der Stern.

Allsdenn können wir es wahrnehmen, wenn der Berührungspunct über den Horizont fällt, und da giebt es das bisher untersuchte Rückgehen des Azimuth.

Dieses Rückgehen ist also allen Sternen gemein, der Astronome kann es bey vielen wahrnehmen, und dem Bewohner der heissen Zone, wird es ohne Astronomie, bey der Sonne, durch die Bewegung des Schattens sinnlich.

Verbesserung des Mittags aus übereinstimmenden Höhen. (Astr. 63)

253. Am wahren Mittage habe die Sonne die nordliche Abweichung D.

254. Wenn sie vormittage die Höhe h hat, sey ihre Abweichung D — m; nachmittage bey eben der Höhe D + n

255. Die Zeit zwischen beyden Beobachtungen, gehöre dem Bogen 2a des Aequators.

Diese Zeit ist gegeben, wenn man den Gang der Uhr kennt, und das läßt sich, selbst ohne Mittagslinie erhalten (51)

256. Wieviel sich die Abweichung der Sonne, zu der Jahrszeit da man diese übereinstimmenden Höhen genommen hat, von einem Mittage bis zum andern ändert, weiß man aus der Theorie der Sonne, oder aus astronomischen Calendern.

257 Selbst ohne dergleichen fremde Hülfsmittel zu gebrauchen, könnte ein Beobachter, der alles hierinn für sich allein thun wollte, so verfahren:

Er bestimmte die Mittagsfläche aus gleich grossen Sonnenhöhen, ohne die Verbesserung die jezo soll gelehrt werden.

Was er so fände, wäre nicht vollkommen die richtige Mittagsfläche, aber davon wenig unterschieden.

Die Höhe der Sonne darinnen, wäre auch wenig von der Mittagshöhe unterschieden.

Und der Unterschied der Höhen in dieser Fläche, zweene Tage nach einander, würde für den Unterschied

schied der Abweichungen an den beyden Mittagen dieser Tage, ohne einen Irrthum der hier beträchtlich wäre, angenommen.

258 Ich sage, ohne einen Irrthum der hier beträchtlich wäre, denn wenn es darauf ankäme, die Veränderung der Abweichung sehr scharf zu wissen, so müßte man sich erinnern, daß man den Unterschied von ein paar Grössen, nicht ganz zuverläßig findet, wenn man jede nur ohngefähr weiß.

259 Ueber dieß ist der Fehler den es giebt, wenn man statt der Mittagshöhe, die Höhe in einer nahe an der Mittagsfläche liegenden Verticalfläche nimmt, nicht für alle Höhen gleich groß;

Hätte man also in dieser Verticalfläche z. E. vor etlichen Wochen, eine Höhe statt der Mittagshöhe genommen, verführe jezo wieder so, und wollte aus dem Unterschiede der Höhen die Veränderung der Abweichungen herleiten, so könnte man sich sehr irren.

Bey Höhen zweener nach einander folgenden Tage aber, ist der angezeigte Fehler ohngefähr einerley, und man ist alsonur einem kleinen Irrthume ausgesetzt.

260. Endlich braucht man auch die Veränderung der Abweichung zwischen den beyden Mittagen, nicht mit der größten Schärfe zu wissen, weil man nur aus ihr auf die Veränderung in einigen Stunden schliessen will, wo sich der bey ihr begangene Fehler vermindert. Es kann also zureichen, sie innerhalb einer Minute zuverlässig zu wissen (unten 295)

261. Es sey also die Abweichung der Sonne den

Mittag nach dem Tage, an dem man die beyden Sonnenhöhen genommen hat D + k

262. Wenn die Abweichung der Sonne nordlich aber abnehmend ist, ist k verneint.

263. Wenn die Abweichung südlich ist, ist D verneint.

264. Allsdenn gehört ein bejahter Werth von k; für abnehmende südliche Abweichung, ein verneinter für zunehmende.

265. Die Veränderung der Abweichung geschiht eigentlich in einem wahren Tage.

Man kann den wahren Tag ohngefähr hie dem mittlern gleich setzen.

Also kann man annehmen die Veränderung geschehe innerhalb 24 h + 4 m' (Astr. 99)

Diese Veränderung ist bekanntermassen um die Nachtgleichen am stärksten, und da beträgt sie etwa 23 bis 25 Minuten, wie man aus astronomischen Kalendern sehen kann.

Also wird sie zu anderer Zeit, innerhalb eines wahren Tages nicht 24 Min betragen.

Und daher in vier Minuten wahrer Zeit noch nicht 4 Secunden.

Innerhalb der wenigen Minuten also, um welche der wahre Tag den Sterntag übertreffen kann, ändert sich die Abweichung der Sonne unmerklich.

Und also darf man annehmen, die Aenderung k geschehe in der Zeit eines Sterntages.

166. In der Zeit also die dem Bogen 2 a zugehört

hört ändert sich die Abweichung um $\frac{a}{180^\circ}$. k welche Aenderung 2 b heissen mag. Diese Veränderung weiß man aus (255 ; 256)

267. Also weiß man die Summe m + n der beyden unbekannten Grössen (254)

268. Wenn man sich die Sonne, in den beyden Stellen, da sie vormittage und nachmittage gleiche Höhen hat vorstellt und durch jede Stelle einen Stundenkreis legt so machen diese beyden Stundenkreise mit einander den bekannten Winkel 2 a ;

269. Man nenne also a — p den Winkel den der östliche mit der Mittagsfläche macht, so macht der westliche mit ihr den Winkel a + p, wo p unbekannt ist.

Die Zeit von der ersten Höhe bis zu Mittage, ist zwar der Zeit von Mittage bis zur zweyten, nicht völlig gleich, beyde können aber doch nur sehr wenig unterschieden seyn. Daher ist p in Vergleichung mit a klein.

270; Also gehören zusammen

	Vormitt.	Nachmitt
Stundenw;	a — p	a + p
Abweichung	D — m	D + n

271. Man hat also aus (9) folgende beyde Gleichungen;

Vormittag

$\cos\varepsilon.\cos(D-m).\cos(a-p)+\sin\varepsilon.\sin(D-m)=\sin k$

Nachmittag

$\cos\varepsilon.\cos(D+n).\cos(a+p)+\sin\varepsilon.\sin(D+n)=\sin k$

272. Beyde Werthe von sin h einander gleich gesetzt geben eine Gleichung, in welcher alle Glieder mit cos ε dividirt, und was sich zusammen schickt auf eine Seite gebracht, folgendes geben

$$\left.\begin{array}{l}\cos(D-m).\cos(a-p) = \sin(D+n)\\ -\cos(D+n).\cos(a+p) \quad -\sin(D-m)\end{array}\right\}.\tang\varepsilon$$

273. Aus 266;269; findet sich $m = b.\left(\frac{1-p}{a}\right)$

$$n = b.\left(1+\frac{p}{a}\right)$$

274 Man hat also eigentlich in der Gleichung (272) nur eine unbekannte Grösse p;

Es würde aber jezt die Ausdrückung ohne Nutzen mehr zusammengesetzt machen, wenn man Alles durch diese einzige ausdrücken wollte.

274. Weil b, p klein sind, so erhellt daß auch m, n, klein, selbst beynahe jedes = b sind, man kann also diese kleinen Winkel statt ihrer Sinusse setzen und ihre Cosinusse sind beynahe = 1.

275. Was (272) rechter Hand in tang ε multiplicirt wird, ist

sin D. cos n + cos D. n
— sin D. cos m + cos D. m

welches also für 2 cos D. b kann angenommen werden.

276. Linker Hand stehn zwey Producte, das zweyte soll von dem ersten abgezogen werden. Sie finden sich so

$$\frac{\cos D.\cos m + \sin D.\, m}{\cos a.\ \cos p + \sin a.\ p}$$

I Prod. $= \cos D.\cos a.\cos m.\cos p + \cos D.\sin a \cos m.p + \cos a.\sin D.\cos p.\, m + \sin D.\sin a.\, m.\, p$

* *

$$\frac{\cos D.\cos n - \sin D.\, n}{\cos a.\ \cos p - \sin a.\ p}$$

II. Prod. $\cos D.\cos a.\cos n.\cos p - \cos D.\sin a.\cos n.p - \cos a.\sin D.\cos p.\, n + \sin D.\sin a.\, n.\, p$

Der erste Theil jedes Products, wo vier Cosinusse mit einander multiplicirt sind ist in einem so groß als in dem andern. (274) Also heben sich diese ersten Theile beym Abziehen auf.

Der letzte Theil des ersten Products, welcher m. p enthält, könnte schon in Vergleichung mit den übrigen als unbeträchtlich angesehn werden, weil er ein Product aus zwo kleinen Grössen enthält, deren nur eine in jedem der übrigen zu finden ist.

Und eben so könnte man des zweyten Products letzten Theil der n. p enthält, in Vergleichung mit den übrigen als unbeträchtlich ansehn.

Hiezu kömmt aber noch, wenn man beyde letzten Theile auch beybehält, daß der im zweyten Producte, von dem im ersten soll abgezogen werden; ihr Unterschied ist gewiß ganz unbeträchtlich (274)

277. Wenn man also das zweyte Product vom ersten abzieht und 2 b statt m + n setzt so ist der linke Theil der Gleichung (272)

2. cos a. sin D. cos p. b
+ 2. sin a. cos D. p

Bey-

Beyde Theile aber gleich gesetzt geben

$$\sin a.\cos D.p = (\cos D.\operatorname{tang}\epsilon - \cos a.\sin D).b$$

$$278\ \text{I}\quad \text{Also } p = \left(\frac{\operatorname{tang}\epsilon}{\sin a} - \cot a.\operatorname{tang} D\right).b$$

II Man muß sich dabey erinnern daß südliche Abweichung verneint ist.

III In diesen Rechnungen wird nirgends vorausgesetzt daß m, n, p, gegen ε, D, klein sind. Es werden nähmlich nirgends, Glieder welche m, n, p, enthalten, in Vergleichung mit solchen, die nur ε, D, ohne m, n, p, enthielten, weggelassen; sondern (274) und (276) bleiben wahr, wenn auch ε; D, selbst sehr klein, so gar kleiner als m, n, p, wären.

IIII Daher gilt die gefundene Formel auch für kleine Polhöhen, selbst unter dem Aequator; für kleine Abweichungen, selbst für die Sonne im Aequator.

Gebrauch hievon zu Verbesserung des Mittags.

279. Zu der Zeit, welche die Uhr wies, als man die erste Höhe nahm, addire man die Hälfte der Zeit zwischen beyden Höhen.

Das wird die Zeit der Uhr seyn die dem Bogen a gehört.

Wenn man für den Augenblick des Mittags diese Summe annimmt, so heißt das der unverbesserte Mittag.

280. Man verwandele den Bogen p (278) in Zeit der Uhr, und ziehe diese Zeit von der Summe

(279) ab (269) so bekömmt man die eigentliche Zeit des verbesserten Mittags.

281. Diese Vorschrift nun zum Gebrauche vollkommen bequem zu machen ist noch zweyerley nöthig.

I. Eine Formel zu geben, aus der man die Zeit welche für p gehört sogleich hat ohne die Verwandlung (280) erst vorzunehmen.

II. Zu entscheiden wenn sich etwa, das angezeigte Abziehen in Addiren verwandelt.

282. Die erste Absicht läßt sich so erreichen.

Man drücke die Veränderung der Abweichung (266) in Secunden des Kreises aus so ist b eine Menge solcher Secunden folglich auch p

Eine Secunde des Aequators gehört zu vier Tertien Sternzeit

283 Also ist $(\frac{\text{tang } \varepsilon}{\text{sin a}} - \text{cot a. tang D}) . 4\,b$ eine Menge Tertien Sternzeit

284 In dieser Formel ist 2b die Aenderung der Abweichung zwischen beyden Höhen. (266)

285 Will man die Formel so einrichten daß sie statt der Tertien Secunden giebt so darf man nur mit 60 dividiren Sie wird allsdenn

$(\frac{\text{tang } \varepsilon}{\text{sin a}} - \text{cot a. tang D}) . \frac{2\,b}{30} = q$ Secunden

Hr. de la l. u. a. drucken des ersten Factors letztes Glied so aus: $\frac{\text{tang D}}{\text{tang a}}$

Ich habe den andern Ausdruck gewählt, weil es leich-

leichter ist, mit der Cotangente zu multipliciren, oder ihren Logarithmen zu addiren.

286 Wenn diese Formel einen bejahten Werth hat so muß man sie von der Zeit des unverbesserten Mittags (279) abziehn.

Weil diese Verbesserung allemahl nur einige Secunden Zeit beträgt, so ist es verstattet die (283) gefundene Menge von mittlerer Zeit oder wahrer Zeit zu verstehn.

287. Zur andern Absicht (281) gehört folgendes.

Wenn man diese Formel auser der heissen Zone braucht, so ist allemahl tang $\varepsilon > \tang D$

Weil ferner allemahl tang $a > \sin a$ so ist

$$\frac{1}{\sin a} > \cot a$$

Also ist auser der heissen Zone, was (283) in 4 b multiplicirt wird, allemahl bejaht.

Und ob die Formel einen bejahten oder verneinten Werth giebt, das kömmt lediglich auf b an.

Aber b ist bejaht oder verneint, nach dem es k ist (266)

288 Im ersten Quadranten der Ekliptik hat die Sonne, nordliche wachsende Abweichung, im vierten, südliche abnehmende. In diesen beyden also ist k bejaht (262; 264)

Im zweyten Quadranten nimmt nordliche Abweichung ab, im dritten südliche zu; In diesen beyden ist k verneint.

289. Man kann also die Regel für 281; II so abfassen.

Man

Man suche die Veränderung der Abweichung von einem Mittage zum andern, ohne sich zu bekümmern, ob die Abweichung ab oder zunimmt.

Daraus berechne man b; welches man also als bejaht ansiht.

Was nun die Formel 283 giebt das ziehe man vom unverbesserten Mittage ab, wenn die Sonne im ersten und vierten Quadranten ist, und addire es, wenn sie sich im zweyten u. dritten befindet.

290 I Vom Ende des dritten Quadranten der Ekliptik bis ans Ende des ersten, steigt die Sonne gegen den Nordpol, und vom Ende des ersten bis ans Ende des zweyten senkt sie sich wieder. Die Vorschrift (289) läßt sich daher auch so ausdrücken:

II. Die Verbesserung des Mittags, wird in den aufsteigenden Zeichen abgezogen in den absteigenden addirt.

III. Wenn die Sonne in aufsteigenden Zeichen ist, so nähert sie sich dem erhabenen Pole, vermöge ihrer eigenen Bewegung.

IIII. Indem sie durch die gemeine Bewegung vom Horizonte gegen den Meridian geführt wird, steigt sie vermöge dieser gemeinen Bewegung über den Horizont.

V Ihre eigne aber, führt sie auch gegen einen Punct, der über den Horizont erhaben ist, dem sie sich nur nähert aber ihn nicht erreicht.

VI Die Sonne steigt also auch über den Horizont vermöge ihrer eignen Bewegung.

Wenn sie auch von der gemeinen Bewegung

nicht aus dem Horizonte in die Mittagsfläche geführt würde, wenn die Sphäre sich nicht drehte, die Sonne nur ihre eigene Bewegung hätte, und sich jezo im Horizonte befände, so würde sie doch einige Zeit darauf, nicht im Horizonte, sondern über ihn erhoben seyn, weil sie sich in dieser Zeit dem Pole genähert hätte.

VII Vormittage also steigt die Sonne zugleich wegen der gemeinen Bewegung, und wegen ihrer eignen, sie steigt also geschwinder, als sie durch die gemeine Bewegung allein steigen würde; vom Horizonte an, oder von jeder andern vormittägigen Höhe, erreicht sie ihre größte, die Mittagshöhe, in kürzerer Zeit, als sie solche nur vermittelst der gemeinen Bewegung erreichen würde.

VIII Nachmittage senkt sie sich wegen der gemeinen Bewegung, in ihrer eignen, ist noch das Steigen; dadurch wird das Senken der gemeinen Bewegung vermindert, sie senkt sich also nicht so schnell, als sie sich vermöge der gemeinen Bewegung allein senken würde; von ihrer größten Höhe an, erreicht sie also jede kleinere, oder den Horizont, später, als sie solche nur vermöge der gemeinen Bewegung erreichen würde.

VIIII. Wenn also die Sonne in aufsteigenden Zeichen ist, so braucht sie von einer gewissen vormittägigen Höhe bis zum Mittage, nicht so viel Zeit als vom Mittage bis zur gleichen nachmittägigen.

Das macht begreiflich, warum die Verbesserung allsdenn soll abgezogen werden.

X. Wenn sich die Sonne in den absteigenden Zeichen befindet, so senkt sie sich vermöge ihrer eignen Bewegung; Sie steigt also vormittage langsamer, als sie nach der gemeinen Bewegung allein steigen würde, nachmittage aber sinkt sie schneller, als sie nur der gemeinen Bewegung wegen sinken würde. Von einer vormittägigen Höhe also, erreicht sie die mittägige später, und von der mittägigen an, die gleiche nachmittägige eher, als nur der gemeinen Bewegung nach geschähe.

Daher wird in den absteigenden Zeichen die Verbesserung addirt.

Den Bogen a aus der Zwischenzeit zu finden.

291. Wenn die Uhr Sternzeit weist so wird er gefunden, daß man 15 Gr auf eine Stunde rechnet.

Wenn sie aber ohngefähr mittlere Zeit weist so könnte man sich der Tafeln bedienen, die mittlere Zeit in Bogen des Aequators verwandeln.

Weil man aber diese Höhen nicht viel früher als 3 St. vormittage, und nicht viel später als eben soviel nachmittage nimmt, so ist es ziemlich gleichgültig, ob man die Verwandlung nach Sternzeit verrichten will, weil 3 St. mittlerer Zeit ein Bogen zugehört, der nur um $7^{I}24^{II}$ grösser ist, als der Bogen der soviel Sternzeit zugehörte, durch welche Aenderung das nicht beträchtlich geändert wird was in der Formel (283) auf diesen Bogen ankömmt.

Selbst 6 mittlere Stunden, gehören zu $90°14^{I}47^{II}$

und statt dieses Bogens können hie ohne grossen Fehler, 90° genommen werden.

292 Exempel

I Gesetzt man hätte zu Göttingen den 20 Jan. 1770 gleich grosse Sonnenhöhen gefunden, eine vormittage als die Uhr 9 h 40 m wies, die andere nachmittage als sie 2 h 20 m wies. Die Uhr zeige mittlere Zeit.

II Ohne die Verbesserung käme der Mittag so:

Vormittage	9 h	40 m
von	14	20
Zwischenzeit	4	40
halb	2	20
addirt zu	9	40
Unverbesserter Mittag	12	0

III. Polhöhe $\varepsilon = 51^\circ 31' 54''$ statt der sich hie $51^\circ 32'$ brauchen lassen.

IIII. Abweichung der Sonne am pariser Mittage

d. 20 Jan	20°	2'	55'' südl.
21	19	49	33
Veränderung in 24 St	= 13	22	= 802''
In einer Stunde	=		33, 41666
In einer Minute	=		0, 5569
In 4 St 40 Min	=	156	= 2 b

V. Die Abweichung am göttingischen Mittage liesse sich eigentlich so berechnen;

Weil die südliche Abweichung abnimmt so hat die Sonne den 20 Jan am göttingischen Mittage mehr südliche Abweichung als am pariser, um so-

viel

viel als sich ihre Abweichung in 30 M 16 S ändert denn um soviel ist der pariser Mittag später.

Das liesse sich also berechnen, wenn man die pariser Abweichungen des 19 u. 20 Jan mit einander vergliche und aus ihrem Unterschiede diese Veränderung nach der Regel Detri suchte.

Wenn daran gelegen ist die Abweichung sehr genau zu haben, z. E. aus der Mittagshöhe die Polhöhe zu finden, so ist dieses Verfahren nothwendig.

VI. Hie aber läßt sich aus IIII übersehen daß diese Veränderung ohngefähr 15^{11} betragen würde und man also in der Formel (285) ohne Bedenken die Pariser Abweichung brauchen darf.

VII. Der halben Zwischenzeit 2 h 20 m gehören $35^{\circ}\,5^{1}\,45^{11} = a$ dafür ich $35^{\circ}\,6^{1}$ nehmen will.

Nähme man die Zwischenzeit für Sternzeit an so fände sich dieser Bogen nur 35 Grad.

VIII. Der erste Factor der Formel (285) hat zweene Theile deren jeden man einzeln berechnet.

VIIII. Erster Theil.

$\log \text{tang}\, \varepsilon = 10{,}0999135$
$\log \sin a = 9{,}7596718$
Unterschied $= 0{,}3402417$
gehört zu 2, 1889 —

VIIII. Zweyter Theil

$\log \cot a = 10{,}1531610 - 10$
$\log \text{tang}\, D = 9{,}5622439 - 10$
Summe $0{,}7154049 - 1$
gehört zu 0,51928

X. Weil die Abweichung südlich ist, so ist der zweyte Theil verneint.

XI. Also $+2,1889$
$+0,51928$

Erster Factor $= +2,70818$

XII. $\frac{2b}{30} = 5,2$; Also

$\log 2,7082 = 0,4326807$
$\log 5,2 = 0,7160033$

Summe $= 1,1486840$

gehört zu 14,08

XIII. Diese Verbesserung wird abgezogen, weil die Sonne in den aufsteigenden Zeichen ist.

XIIII. Also

unverbesserter Mittag 12h 0m 0f
Verbesserung — 14,08

Verbesserter 11h 59m 45,92f

Was es bey dieser Verbesserung für Fehler giebt, wenn man k (266) unrichtig angenommen hätte.

293. In (285) ist $\frac{2b}{30} = \frac{2a}{360°} \cdot \frac{1}{30}\ k$;

Dieser zweyte Factor, mit dem ersten multiplicirt giebt q Zeitsecunden.

Nähme man nun $k+u$ statt k; so bekäme man ein ander Product, das eben den ersten Factor, und im zweyten, $k+u$ statt k hätte. Jenes Product ver=

verhielte sich also zu diesem $= k : k + u$; und dieses andere Product gäbe also $q + \frac{u}{k} . q$ Secunden.

Das letzte Glied wäre der Fehler den man in der Verbesserung beginge wenn man $k + u$ statt k nähme.

294. Im Exempel (292) setze man die Veränderung der Abweichung in 24 Stunden, wäre 12^{1} 22^{11} angenommen worden. Also $\frac{u}{k} = -\frac{60}{802}$;

Dieses mit 14 multiplicirt gäbe ohngefähr -1; und man brächte die Verbesserung nur 13 Secunden heraus statt daß sie 14 ist.

295. Man darf also bey der Veränderung der Abweichung in 24 Stunden, um keine Minute des Kreises ungewiß seyn.

Wie Tafeln für diese Verbesserung verfertiget werden.

296 EF sey die Ekliptik, in der die Sonne in einer kurzen Zeit um Ff 13 Fig. fortrückt, und zugleich ihre Abweichung von FG in fg ändert. Man fragt wieviel die Veränderung der Abweichung beträgt? 13 f.

297. Aufl. Es sey die Länge der Sonne $EF = \lambda$; die Schiefe der Ekliptik $E = \theta$; die Abweichung $FG = \delta$; also $\frac{\sin \delta}{\sin \lambda} = \sin \theta$. Der Quotient linker Hand ist eine beständige Grösse, wenn die Schiefe der Ekliptik unveränderlich angenommen wird.

Dieser Quotient differentiirt das Differential $= o$ gesetzt und jedes Sinus Differential durch das Product aus seinem Cosinus in das Differential seines Bogens ausgedruckt kömmt $d\delta = \cot\lambda . \tang\delta . d\lambda$

298 Man nimmt ohne grossen Irrthum die eigne Bewegung der Sonne innerhalb eines wahren Tages für $d\lambda$ an; So giebt die Formel (297) wieviel sich die Abweichung in einem wahren Tage ändert.

299. Diese Formel setzt die Länge der Sonne, und ihre Abweichung für diese Länge zum voraus. Die Abweichung aber, ist durch die Länge bestimmt, also wird die Veränderung der Abweichung, durch die Länge und durch die Veränderung der Länge gegeben.

300. Die Veränderung der Länge in einer gewissen Zeit, richtet sich nach der Geschwindigkeit der Erde, in der Stelle ihrer elliptischen Bahn, wo sie sich allsdenn befindet, nach der Anomalie; (Astr. 245) folglich nach der Länge der Sonne.

Aus der angenommenen Länge, findet sich die Abweichung blos durch die Sphärik (Astr. 75) aber die tägliche Bewegung der Sonne aus der elliptischen Theorie (Astr. 239.)

Die Sonne hat im zweyten Quadranten der Ekliptik einmahl wieder eben die Abweichung die sie im ersten hatte, aber eine andere Anomalie, folglich eine andere tägliche Bewegung, folglich eine andere Veränderung der Abweichung. Eben so wenn die Abweichung in den beyden letzten Quadranten südlich wird.

301. Wenn man also eine Tafel machen will, bey der die tägliche Veränderung der Länge, als gegeben angesehn wird, so muß man diese Tafel nach der Länge der Sonne ordnen, nicht nach der Abweichung, weil gleichen Abweichungen, ungleiche Veränderungen der Abweichungen zugehören.

302. Wie groß also die tägliche Veränderung der Länge, für jede Länge ist muß aus der Theorie der Sonne gefunden werden und das läßt sich hier nicht zeigen.

303. Wenn man aber annimmt es könne gefunden werden, so begreift man, zu gegenwärtigem Gebrauche Folgendes.

304. I Für eine Länge die man nach Gefallen annimmt berechne man die Abweichung.

II Man nehme nach Gefallen eine Zwischenzeit zwischen beyden Höhen an, diese giebt den Bogen a;

III Aus der täglichen Veränderung der Abweichung die der angenommenen Länge zugehört (302) berechne man wieviel sich die Abweichung in der angenommenen Zwischenzeit ändert;

So hat man 2b

IIII. Also hat man cot a. tang D. $\frac{2b}{30}$

305 Dieser Theil der Formel (285) mag jezo, der zweyte Theil der allgemeinen Gleichung zur Mittagsverbesserung heissen. Er gilt für alle Polhöhen. Unter dem Aequator machte er die ganze Verbesserung aus.

306. Man berechne ferner $\frac{1}{\sin a} \cdot \frac{2b}{30}$ das heisse man den ersten Theil der allgemeinen Gleichung.

307 Dieser muß für jede Polhöhe, mit ihrer Tangente multiplicirt werden; so giebt er diesen Theil für diese Polhöhe.

308 Beyde Theile gehörig zusammengesetzt geben die Verbesserung des Mittags, wie sie verlangt wird.

309 Exempel.

I.) Die Sonne sey im Anfange des Wassermanns, also ihre Länge = 300 Grad

II) Die Zwischenzeit der Beobachtung sey 4 h 40 m, also a wie 292; VII.

III) Die Schiefe der Ekliptik 23° 28′; (de la Lande Expos. du Calcul Astron. art. 264.

IIII) $\log \sin \theta = 9,6001181$
$\log \sin \lambda = 9,9375306$
$\log \sin \delta = 9,5376487$
giebt $\delta = -(20° 10′)$

Weil sin λ verneint, ist bekömmt auch δ einen verneinten Werth, dieser zeigt bekanntermassen südliche Abweichung an.

Aus Gellibrands Tafeln ist diese südliche Abweichung etwas kleiner als 20° 10′ 48″

V. Weil $a = 35°,2$ so wird die Rechnung folgendergestalt geführt

$\log k =$

$\log k = 2{,}8906$
$\log a = 1{,}5465427$

Summe $= 4{,}4371427$
$\log 180 = 2{,}2552725$

$\log 2b = 2{,}1818702$
$\log 30 = 1{,}4771212$

$\log \frac{2b}{30} = 0{,}7047490$
$\log \cot a = 10{,}1531610 - 10$
$\log \tan g D = 9{,}5652952 - 10$

Summe $= 0{,}4232052$
gehört zu 2,6497

Der zweyte Theil der Verbesserung (305)

VI. Hiebey braucht nichts Erläuterung, als wo $\log k$ herkömmt, dieß soll unten gesagt werden (311)

VII. Ferner $\log \frac{2b}{30} = 0{,}7047490$
$-\log \sin a = -9{,}7596718 + 10$

$\log \frac{2b}{30, \sin a} = +0{,}9450772$

gehört zu 8. 8120

Der erste Theil (306)

310. So kann man unterschiedene Werthe von a annehmen, und für jeden diese beyden Theile berechnen.

Die Reihe dieser Werthe, könnte seyn, wie sie 1h 40m; 2h; 2h 40m; und so durch Aenderungen

gen von 20m allerley Zeiten zugehörten da die grösste 4h wäre. Denn weiter vom Mittage nimmt man nicht gern übereinstimmende Höhen.

311. So findet sich eine Tafel beym de la L. Astr. 641 I Ausg. 945. II. Ausg. unter der Aufschrift: Equation generale. Sie ist von 10 zu 10 Graden der Länge berechnet, und bey jedem dieser Grade steht der Logarithme der täglichen Aenderung der Abweichung, daher habe ich log k genommen (309; VI) Er nennt ersten und zweyten Theil, was ich zweyten und ersten nenne. Ich richte mich nach ihrer Ordnung in der Formel (285). Diese Formel muß man wegen ihrer Zusammenfügung, doch immer dabey haben, also veranlaßt es Irrungen die Theile anders zu nennen.

Für das berechnete Exempel stehen dort folgende Zahlen.

statt 309; V; 2, 64
VII; 8, 80

Hr. de la L. hat die Zwischenzeit als Sternzeit angesehen (291)

In des Hr. P. Hell Ephemeriden stehen sehr brauchbare Tafeln hiezu. Ihre Einrichtung ist folgende:

In den Ephem. 1772, giebt

Tab. XXV; corr. hor. mer. .. sub aequatore. . .. den zweyten Theil (305)

Tab. XXVI; c. h. m. sub parallelo 45° adhibenda; den ersten Theil (306)

Diese beyden hat der Hr. de la Caille berechnet.

Tab.

Tab. XXVII; c. h. m. pro singulis latitudinis gradibus, correctioni sub parallelo 45° substituenda; die Glieder der XXVI Tafel, jedes mit der Tangente jeder Polhöhe, von 1° bis 60° multiplicirt, also die ersten Theile für diese Polhöhen (307)

Aus diesen Tafeln also hat man die Verbesserung (308)

312. Aus Zahlen, wie 309 berechnet worden, findet sich die Verbesserung für eine gegebne Polhöhe folgender gestalt.

Wenn das dorten berechnete Exempel auf Göttingen sollte angewandt werden so wäre

der Logarithme (309; VII) = +0,9450772

$$\log \text{tang } \varepsilon = \underline{10{,}0999135 - 10}$$

1,0449907

gehört zu 11,091

Eine Tafel für einen gegebenen Ort zu berechnen

313. Zu dieser Absicht dürfen nur die bisherigen Vorschriften, so gesammlet werden daß man sie auf einmahl übersiht.

I; Mit der allgemeinen Verbesserung ersten Theile (306) verfahre man nach (307)

II; Zu dem was so heraus kömmt, addire man den zweyten Theil (305) bey südlicher Abweichung, und ziehe ihn davon bey nordlicher ab.

III; Das Ganze das so entsteht, ziehe man in den aufsteigenden Zeichen, ab, in den absteigenden addire man es (290)

IIII. Exempel; für Göttingen

Aus (312) erster Theil = 11,091 (I)
Aus 309; V zweyter Theil =+ 2,6497 (II)
Verbesserung = 13,7407

Abzuziehen (III)

V. Die Zahl dieses Exempels ist fast mit der 292 XII; einerley. Nähmlich den 20 Jan. befindet sich die Sonne am Anfange des Wassermannes.

Der geringe Unterschied rührt theils daher das etwa zu der hiesigen Rechnung, Schiefe der Eklyptik, und Aenderung der Abweichung ein wenig anders sind angenommen worden, als die dortige Rechnung sie voraus setzte, theils auch daher, daß sich die Sonne an selbigem Mittage, nicht genau im Anfange des Zeichens befand; Sie war am Pariser Mittage in $35^{I}\ 42^{II}$ des Zeichens.

VI Uebrigens ist leicht zu begreifen daß der Unterschied zwischen beyden Verbesserungen wenig zu bedeuten hat und man also den aus der Tafel brauchen könnte die mühsame Rechnung (292) zu ersparen

314. Hr. Ljungberg, jeziger Prof. der Mathematik zu Kiel, hat bey seinem hiesigen Aufenthalte, eine solche Tafel für Göttingen berechnet, aus der ich das Stück zur Probe vorlegen will, das zum Wassermanne gehört; Sie geht bis auf 4 Stunden halbe Zwischenzeit.

Länge

Länge der ☉ abgezogen	Halbe Zwischenzeit der Beobachtungen				
Zeichen	1h40m	2h0m	2h20m	2h40m	3h
X 0°	13,44	13,65	13,72	13,84	13, 92
10	16,65	16,80	16,91	17,03	17, 19
20	18,83	19,05	19,19	19,35	19, 58

Eine Tafel für Paris findet sich in Hr. de la L. Astr. 641 §. I. Ausg. 945 II. am letzten Orte sind einige Zahlen anders als in der ersten Ausgabe.

Sie enthält die Längen von 6 zu 6 Graden und, halbe Zwischenzeiten von 30 zu 30 Minuten, die kleinste 2 Stunden die größte 6.

Gebrauch der Tafel.

315. Wenn man unterschiedene Paare übereinstimmender Höhen hat so muß man eigentlich die Verbesserung aus jedem Paare suchen; und aus dieser Verbesserung, und dem unverbesserten Mittage den das Paar giebt, den verbesserten Mittag herleiten.

Alle diese verbesserten Mittage, jeder aus einem andern Paare hergeleitet, müssen einerley seyn, wenn Beobachtungen und Rechnungen völlig richtig sind.

Fänden sich kleine Unterschiede unter diesen verbesserten Mittagen, so nähme man wieder aus diesen Mittagen ein arithmetisches Mittel, für den zuverlässigsten Mittag an.

316. Wenn die halbe Zwischenzeit nicht genau in der Tafel zu finden ist so läßt sich die ihr zugehörige Verbesserung, leicht durch Proportionaltheile ver-

berechnen, weil die Tafel zeigt ($\frac{3}{8}$14) daß bey einer Länge der Sonne, die Verbesserung von 20 zu 20 Minuten sich nur wenig ändert.

317. An einem Tage da die Sonne nicht eine der Längen hat, die man in der Tafel findet, kann man ebenfalls die Verbesserung durch Proportionaltheile suchen.

Exempel. Aus der Tafel (314) wollte man die Verbesserung für 1 h 40 m Zwischenzeit wissen, wenn die Sonne im 3 Gr des Wassermanns ist.

Die Verbesserung für diese Zwischenzeit wächst um 3, 21 indem die Länge um 10 Gr. wächst; Wenn also die Länge um 3 Gr. wächst wird sie wohl um 3, 21. 0, 3 = 0, 96 x wachsen, also für diese Länge 14, 40 seyn.

318 Es ist freylich kein Beweis zu geben daß die Verbesserungen in der Verhältniß der Längen wachsen. Der Astronome kann also wählen, ob er sich der Gefahr um eine Kleinigkeit zu irren aussetzen oder die Mühe der vorigen Berechnungen übernehmen will.

319. Fände sich in der Tafel weder Länge noch Zwischenzeit, so müßte man nach 316; 317; beyderley Proportionaltheile suchen.

Wäre an einem Tage des Exempels (317) die halbe Zwischenzeit 1 h 50 m; so berechnete m n nach (317) für diesen Tag die Verbesserungen für 1 h 40 m u. 2 h 0 m; Aus ihnen wieder die Verbesserung für 1 h 50 m nach (316). Mit künstlichen Interpolationen will ich gegenwärtigen Vortrag nicht unterbrechen.

Wenn

Wenn die Verbesserung am gröſten wird.

320; I Der Verbesserung Grösse richtet sich offenbahr nach drey Umständen; Polhöhe, Abweichung u. Zwischenzeit.

II. Sind der erste u. dritte gegeben, so ist sie in den Nachtgleichen am gröſten weil sich da die Abweichung am schnellsten ändert.

III. Daß sie für einerley Polhöhe, desto gröſſer wird, je gröſſer die Zwischenzeit ist, wenigstens für die hier gewöhnlichen Zwischenzeiten, das läßt sich ohne schärfere Untersuchung, gleich daraus abnehmen weil die Verbesserung wegen Veränderung der Abweichung nöthig ist, diese Veränderung ist aber zwischen beyden Höhen desto geringer, je kürzer ihre Zwischenzeit ist.

IIII. Braucht man also die Hälfte der gröſten gewöhnlichen Zwischenzeit, und die gröſte Polhöhe wo man etwa noch einen Beobachter vermuthet, so findet sich die gröſte Verbesserung unter allen.

V. In der (311) angeführten Tab. XXVI; gehören in der Frühlingsnachtgleiche, zu 4 Stunden halber Zwischenzeit, 18, 23 Secunden Verbesserung; (in der Herbstnachtgleiche, etwas sehr geringes weniger)

Dieser Verbesserung, welche unter dem Parallele 45° gültig wäre, oder eigentlich der ein wenig gröſſern 18, 5 gehören in der XXVII Tafel, unter dem 60 Grade Polhöhe, 32, 02 Verbesserung.

Auf gröſſere Polhöhen erstreckt sich die Tafel nicht.

VI In dieser Bedeutung vermuthlich, sagt de la Caille: der Fehler welcher bey übereinstimmenden Sonnenhöhen vorkömmt, betrage an keinem irgend wohnbaren Orte über 30 Secunden. Lect. El. Astr. §. 326; der lat. Uebers.

Erstreckung der Tafel auf mehr Stunden als in ihr enthalten sind.

321. In der Formel (285) nenne man $\frac{\text{tang } \varepsilon}{\text{sin a}} = M$; cot a. tang $D = N$; und drücke 2 b durch k (266) aus; So ist

$$(M - N).\frac{a.k}{180^\circ.30} = q$$

Dieses giebt $$\frac{k}{180^\circ.30} = \frac{q}{(M-N).a}$$

322. Ohne daß sich sonst was ändert suche man die Verbesserung für einen Bogen der $= 180^\circ - a$ ist. Diese Verbesserung betrage r Zeitsecunden. So müssen folgende Verwechslungen gemacht werden.

Statt 285	a	sin a	cot a	q
kömmt hier	$180^\circ - a$	sin a	$-$ cot a	r
also in 324 statt	M	$-$ N		
hier	M	$+$ N		

323 Folglich in 321;

$$\frac{k}{180^\circ.30} = \frac{r}{(M+N).(180^\circ - a)}$$

324 Also beyde Werthe einer Grösse (321; 323) gleich gesetzt

$$r = \frac{(M+N).(180^\circ - a)}{(M-N).a}.q$$

$$= \frac{M+N}{M-N}.\left(\frac{180^\circ}{a} - 1\right).q$$

325. Hätte man also die Verbesserungen bis $a = 90^\circ$ berechnet, so gäben sich die Verbesserungen für grössere Zwischenzeiten bis $a = 180^\circ$

326. Das ist wenn man die Verbesserungen bis 6 Stunden halbe Zwischenzeit berechnet hat so finden sich daraus die bis 12 Stunden halbe Zwischenzeit. (291)

327. Die Absicht (326) zu erreichen giebt Hr. de la L. Altr. 945 II Ausg. eine Regel, (in der ersten Ausg. steht sie nicht,) die ich gleich durch das Exempel das er selbst braucht erläutern will.

„Wenn man die Verbesserung für 10 Stunden „haben wollte (sagt er) so nimmt man die welche 2 „Stunden zugehört (jener Ergänzung zu 12 St) und „sagt: 2 Stunden geben die Verbesserung der Ta„fel die bey ihnen steht was geben 10 Stunden?„

Das ist nach Hr. de la L. die Verbesserung für 10 St.

Diese Regel in meinen Zeichen ausgedruckt, und die Zeit als Sternzeit angesehen wie Hr. de la L. thut käme folgendes

$$r = \frac{180^\circ - a}{a}.q = \left(\frac{180^\circ}{a} - 1\right).q$$

328. Hr. de la L. Regel u. meine können nicht zugleich wahr seyn wenn nicht $M+N = M-N$ (324)

329 In der That hat auch Hr. de la L. daran nicht gedacht daß die eine Verbesserung $M+N$ die andere $M-N$ hat, denn er erläutert seine Regel noch durch ein anderes Exempel, auf eben die Art aus der Verbesserung für 4 Stunden, die für 8 St. zu finden, und führt zum Beweise der Regel an: „Der Stundenwinkel zwischen 8 Stunden und der „zwischen 4 Stunden wären einerley.

330 Sie sind aber nicht einerley, sondern sie machen zusammen 180 Grad. Sie haben einerley Sinus, aber entgegengesetzte Tangenten und Cotangenten.

331 Zum Ueberflusse füge ich ein Exempel bey welches auch dienen kann das Verfahren zu erläutern.

Es ist von Hr. Noble aus Neuyork in Nordamerika berechnet worden welcher sich ein Jahr meiner Anführung mit glücklichem Eifer bedienet hat. Er hat einen grossen Theil gegenwärtigen Werks im Manuscripte gelesen, und durch Wiederholung der Rechnungen, mir die Zeit erspart, mich selbst auf diese Art von derselben Richtigkeit zu versichern. Ich schlug ihm eine Mittagsverbesserung für Paris zu berechnen vor, in der Meynung er sollte dabey die Tafel des Hr. de la L. brauchen.

Er hat sich aber bey der Rechnung Mühe gegeben, die ich ihm nicht auferlegt, wenigstens durch Mittheilung der Connoissance des Tems erleichtert hätte. Folgendes ist seine Rechnung.

332 Mittagsverbesserung d. 3 April 1772 zu Paris, für 20 Sternstunden Zwischenzeit.

$\varepsilon = 48^\circ\, 50^{'}\, 14^{''}$, $a = 150^\circ$

Die Abweichungen der Sonne aus dem Nautical Almanac 1772; sind

d. 3. April	5°	38′	00″
2		5	15	3
Aenderung	22	57	= 1377″

Paris liegt 9 M 16 S Zeit östlicher als Greenwich die Abweichung ist also am Pariser Mittage d. 3. Apr. kleiner, als am Greenwicher für den der Nauticalalmanach gerechnet ist. Den Unterschied giebt die Proportion

24 H : 9 M 16 S = 1377 : 9

also ist die Abweichung am Pariser Mittage den 3 April oder $D = 5^\circ\, 37\, 51^{''}$ (*)

332 **Rechnung nach** (320)

$\log \text{tang}\, \varepsilon = 10,0583460$

$\log \sin a = 9,6989700$

$\log M = 0,3593760$

$M = 2,2876$

$\log \text{tang}\, D = 8,9938514 - 10$

$\log \cot a = 0,2385606$

$\log N = 0,2324120 - 1$

$N = -0,17077$ weil cot a verneint ist

$M - N = +2,45837$

(*) So ist sie auch in der conn. d. T. angegeben.

333 Der andere Factor ist $\frac{150}{180} \cdot \frac{k}{30} = \frac{k}{36}$

Aus dem Naut. Alm. ist die Aenderung der Abweichung vom 3 bis 4 April
oder $k = 22' 49'' = 1369''$

334 Also ist $\log 1369 = 3,1364034$
$\log 36 = 1,5563025$

$\log \frac{1}{36} k = 1,5801009$
$\log (M - N) = 0,3906525$

$1,9707534$

gehört zu 93,487; Also wäre die Verbesserung so viel Secunden oder $1' 33'',487$:

Rechnung nach 324.

335 Zuerst muß eine Verbesserung berechnet werden die für einen Bogen a der unter 90° ist gehört und zwar für den der 180° mit 150° macht also für 30° oder 2 Stunden. (*)

Hier sind die gegebenen Zahlen mit den in voriger Rechnung einerley, nur ist $a = 30°$ da es vorhin

(*) Die Verbesserungen bis 6 Stunden findet man für Paris in einer Tafel die Hr. de la L. mitgetheilt hat und meine Absicht als ich Hr N. diese Rechnung vorschlug war, er sollte sich dieser Tafel bedienen. Er hat aber die Rechnung noch schärfer als eine solche Tafel sie geben kann zu führen, die Verbesserung für 2 Stunden aus den Formeln selbst berechnet.

hin 150° war, folglich die Cotangente bejaht die vorhin verneint war. Also ist das jezige

$$N = +0,17077,$$
$$M - N = +2,1168$$

Der andere Factor ist hier $\frac{k}{180}$, und sein Logarithme $= 0,8811309$

$$\log(M-N) = 0,3256789$$
$$1,2068098$$

giebt die Verbesserung 16,099 Secunden (*)

Das wäre also q; Ferner ist $\frac{180°}{a} - 1$ hie $= 6 - 1 = 5$; und bey jeziger Rechnung ist $M + N = 2,45837$ was nähmlich bey voriger Rechnung $M - N$ war.

336 Also

$$\log(M+N) = 0,3906525$$
$$\log 5 = 0,6989700$$
$$\log q = 1,2068098$$
$$2,2964323$$
$$\log(M-N) = 0,3256798$$
$$\log r = 1,9707525$$

(*) Die Länge der Sonne am Pariser Mittage ist 14° 15′ 46′′ und in Hr. de la L. Tafel gehören zu 2 Stunden, 16, 5 Secunden Verbesserung bey 12 Gr Länge, und 15,5 bey 18 Gr Länge. Zwischen diese beyden Gränzen fällt die hier berechnete Verbesserung, wie gehörig.

Man sieht daß dieser Logarithme mit dem den die vorige Rechnung gab bis auf die beyden letzten Zifern einerley ist. Er fällt zwischen eben die beyden nächsten Logarithmen der Tafel zwischen welche der vorige fällt, und giebt also bis auf Tausendtheile, eben die Verbesserung.

Rechnung nach Hr. de la L. Regel (327)

337 Da verhielte die Verbesserung für 2 St zu der für 10 St wie 2 : 10 da also für 2 Stunden die Verbesserung (nach der zweyten Rechnung) 16,099 Secunden ist so wäre sie für 10 Stunden fünfmahl so groß = 80, 495 Secunden.

338 Die erste dieser drey Rechnungen (332) ist unmittelbar nach der Formel geführt, nach der die Verbesserung des Mittags von allen berechnet wird. Die zweyte (336) giebt genau eben dasselbe. Die aber nach Hr. de la L. Regel (337) giebt Etwas, das von jenen beyden übereinstimmenden, um 13 Secunden unterschieden ist. Sie wäre also nicht sicher, auch nur als eine Näherung der Bequemlichkeit wegen zu brauchen.

Wenn die erste Höhe nachmittage die zweyte den folgenden Vormittag genommen wäre.

339. Witterungen oder andere Umstände, können dazu nöthigen, und man kann allsdenn die Zeit der Mitternacht zwischen beyden Höhen, suchen.

14f. 340. Z P R 14 Fig. sey der nordliche Quadrant des Meridians, S K ein Kreis dem Horizonte

O R W

QRW parallel, die Sonne das erstemahl in K das zweytemahl in S;

341. Man begreift leicht daß hie KPS = 2a gesetzt werden kann und daß sich alle Schlüsse von 266. . 295 wiederhohlen lassen wenn man nur den Unterschied bemerkt, daß dorten die Sonne von der ersten Höhe bis zur Mittagshöhe stiege, von der Mittagshöhe bis zur zweyten sank; Hier aber diese Aenderungen in umgekehrter Ordnung erfolgen, die Sonne senkt sich von der ersten Höhe, bis an Mitternacht und steigt von Mitternacht bis zur zweyten.

342 I Wenn man also hierauf die Betrachtungen 290; IiI; u. f. anwendet, so wird nachstehendes erhellen.

Ii. Die Sonne sey in aufsteigenden Zeichen; so senkt sie sich von K bis Mitternacht, langsamer als sie nur wegen der gemeinen Bewegung thäte, und steigt von Mitternacht bis S schneller.

Die Zeit von der ersten Höhe bis an Mitternacht ist also länger als sie seyn würde wenn die Sonne keine eigne Bewegung hätte;

Heißt also **unverbesserte Mitternacht** das Mittel zwischen den Zeiten von K u. S; so wird in in den aufsteigenden Zeichen die Verbesserung addirt.

III. Eben so folgt aus der eignen Bewegung der Sonne, daß sie in den absteigenden Zeichen, von K bis Mitternacht schneller sinkt, von Mitternacht bis S langsamer steigt, also von K bis Mitternacht weniger Zeit braucht, als sie nur wegen der gemeinen Bewegung brauchen würde.

In den absteigenden Zeichen wird also die Verbesserung abgezogen.

IIII. Solchergestalt läßt sich die Formel (285) auch hie brauchen nur wird die Mitternachtsverbesserung addirt wenn die Mittagsverbesserung abgezogen würde, und umgekehrt.

V. Es versteht sich, daß man eigentlich für D die Abweichung der Sonne um Mitternacht brauchen müßte, und eben so ihre Länge um Mitternacht, wenn man sich einer Tafel bedient, und wenn diese Tafel durch so kleine Veränderungen der Länge geht.

343. Das bisherige lehret Hr. de la L. Astr. 945 II. Ausg.

Und noch folgendes dazu:

Wenn die Zwischenzeit zwischen K u. S, 18 Stunden wäre, also die halbe, 9 Stunden, da fände sich die Verbesserung nicht in seiner Tafel, die nur bis 6 Stunden geht (314)

Allsdann, sagt Hr. de la L. sollte man nur die Verbesserung für 3 Stunden aus der Tafel nehmen, und mit 3 multipliciren. Uebrigens mit diesem Dreyfachen, nach (342; IIII) verfahren.

344. Hiebey habe ich eben das (328) geäuserte Bedenken. Nähmlich in der Formel (285) ist der Wehrt von a; für 3 Stunden $= 45°$

9 $= 180° - 45$

was also für 3 Stunden M — N ist das wird M + N für 9 Stunden u. s. w.

Aen

Aenderung der Verbesserung, wenn man die Polhöhe ein wenig ändert.

345. Wenn Alles übrige bleibt, so sieht man leicht was d M seyn würde (32ϕ) dadurch würde also die kleine Aenderung der Verbesserung bestimmt werden.

Hr. de la L. scheint solche kleine Aenderungen nicht ganz für unbeträchtlich zu halten, Astr. 932. II Ausg.

Da sein Observatorium im Mittel von Paris gelegen ist, so hält er für besser, eine Tafel die sehr umständlich wäre, für dasselbe, als für das königliche zu berechnen. Man könnte sie allsdenn sagt er in allen Theilen von Paris ohne merklichen Irrthum brauchen.

Wie man die Formel (285) bey südlicher Polhöhe braucht.

346. Diese Formel nimmt nicht an, daß P der Nordpol sondern daß es der erhobene Pol ist. Aber D sieht sie als bejaht oder verneint an, nach dem diese Abweichung gegen den erhobenen Pol, oder von ihm abwärts, jenseit des Aequators liegt.

Also bedeuten zusammen, ε südliche Polhöhe, und + D südliche Abweichung, und so läßt sich die Formel für südliche Polhöhe brauchen.

Aufsteigende Zeichen sind allsdenn, die wir Nordländer, absteigende nennen u. umgekehrt.

Mit dieser Bemerkung bleibt auch 290; II hie wahr.

Daraus

Daraus wird man Hr. de la L. Vorschriften vom Gebrauche der allgemeinen Tafel, bey südlicher Polhöhe verstehn Astr. 639. I Ausg. 943 II. Ausg.

Für die heisse Zone.

347. I Da bleibt 287 nicht wahr, und man muß also wegen des Addirens und Subtrahirens der Verbesserung andere Vorschriften als die gegebenen machen. Sie werden sich darnach richten ob die Abweichung kleiner oder grösser ist als die Polhöhe. Sollte jemand von meinen Lesern sie nöthig haben, so wird er sie aus meinen Lehren leicht selbst finden.

II In dieser Zone wird die Mittagsverbesserung auch auser den Solstitialtagen $= o$; wenn in (278) der Coefficient bey b verschwindet oder

$$\cos a = \frac{\text{tang } \varepsilon}{\text{tang } D}$$

Hr. de la L. Astr. 930 II. Ausg. drückt dieses so aus: Wenn sich die Tangente der Abweichung zur Tangente der Polhöhe verhält, wie des Stundenwinkels Tangente zu seinem Sinus.

Nach diesem Durchgange durch o muß sich bey der Verbesserung, Abziehen in Addiren verwandeln u. umgekehrt, ob gleich die Sonne vor und nach demselben in einerley Zeichen ist.

Für die kalte Zone

348 Sehe ich nichts besonders zu erinnern als daß sich da, wenn die Sonne genug Abweichung hat,

hat, ihre beyden Durchgänge durch die Mittags-fläche wahrnehmen lassen und die Mitternachtsver-besserung (342) sich mit Beobachtungen vergleichen liesse.

Daß eine Tafel nach 296 u. f. berechnet nicht immer richtig bleibt.

349. Diese Tafel setzt folgendes beydes zum voraus:

I) Eine gewisse Schiefe der Ekliptik

II) Eine gewisse tägliche eigne Bewegung der Sonne, für eine gegebene Länge derselben.

Aber beydes ist nicht beständig.

Wegen des ersten sehe man meine Astron. 79. auch dieser Abhandl. 509 §. imgl. Hr. de la Lande Exposition du Calcul Astronomique art. 137.

Wegen des andern ist folgendes klar.

In so fern man die Attraction anderer Weltkör-per als der Sonne, nicht betrachtet, kömmt die Ge-schwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, auf den Winkel an den die Linie von ihr nach der Sonne, mit der Axe der Erdbahn macht (Astr. 245)

Die Axe der Erdbahn verrückt sich (Astr. 248) Also ist der genannte Winkel bey einerley Länge der Sonne nicht immer einerley.

Da aber beyderley Grössen, welche die Tafel als beständig annimmt, sich nur langsam ändern, so ist eine solche Tafel etwa 100 Jahr ohne merkli-chen Fehler zu brauchen. De la L. Astr. 944. II. Ausg.

Anwendung der Methode der übereinstimmenden Höhen auf die Planeten.

350. I Das Allgemeine dieser Methode ist offenbahr dieses:

Man hat gleichgrosse Höhen eines Weltkörpers der seine Abweichung ändert.

Die Mittagsverbesserung giebt die Zeit, wenn er in der Mittagsfläche war, aus der halben Zeit zwischen beyden Höhen.

II. Man nimmt hier an, der Weltkörper habe keine merkliche Parallaxe, sie sey wenigstens zu gegenwärtiger Absicht nicht beträchtlich.

Denn sonst müßte man wenigstens genauer untersuchen, ob und was für Veränderungen in diesen Regeln die Parallaxe macht die für andere Höhen, Stundenwinkel u. d. g. anders ist.

III. Darf man sie also bey einem Planeten bey seite setzen, so wird man aus übereinstimmenden Höhen ebenfalls seinen Durchgang durch die Mittagsfläche berechnen können wenn man nur weiß wieviel sich seine Abweichung in 24 St. ändert, nach (256; 257)

IIII. Wüßte man daß an dem Tage der Beobachtungen, des Planeten Abweichung sich so stark änderte, als die Abweichung der Sonne, an einer der Stellen, die man in einer der beschriebenen Tafeln findet, so könnte man selbst für den Planeten, die Mittagsverbesserung brauchen, welche die Tafel angiebt.

V Das Addiren oder Abziehen aber (290) würde nicht nach dem Buchstaben der Tafel verrichtet, sondern nach ihrem Geiste, nähmlich darnach, ob sich der Planet in absteigenden oder aufsteigenden Zeichen befindet. Der Buchstabe der Tafel redet von der Sonne.

VI Bey dem Monde, würde wegen seiner schnellen eignen Bewegung, der Parallaxe u. damit zusammenhängender Umstände, dieses Verfahren mühsam seyn, doch in Ermangelung anderer Mittel verdienen gebraucht zu werden. De la L. Astr. 633 I Ausg. 937. II Ausg.

Die Mittagsverbesserung durch den parallactischen Winkel ausgedruckt.

351. Wenn ZPS 15 Fig das Dreyeck ist, das 15 f.
die Sonne bey der vormittägigen Höhe mit Pol und Zenith macht so lege man durch S einen Kreis mit dem Horizonte parallel, den ein Bogen $PB = 90° - D$ (323) ostwärts in B schneide.

Der gleiche Bogen wird diesen Kreis noch einmahl westwärts schneiden und mit dem Meridian westwärts einen Winkel $= ZPB$ machen.

Zwischen beyden Lagen des Bogens, geht der Meridian mitten durch

Wenn die Sonne den ganzen Tag über die Abweichung D behielte, so brauchte sie von der vormittägigen Höhe zur nachmittägigen, soviel Zeit als dem Stundenwinkel 2. BPZ zugehört

Also ist $BPZ = a$. 352

352. Die beyden Dreyecke, ZPB; ZPS; haben eine Seite im Meridiane gemein, auch ZS = ZB; aber PS = PB + m (265)

ZPS = a — p

353. Man kann sich also vorstellen im Dreyecke ZPB bleiben die beyden Seiten, die es mit dem andern gemein hat, das Uebrige ändert sich, und so kann man fragen wie sich die Veränderungen der dritten Seite, und des Winkels den sie mit ZP macht verhalten.

354. Dieses gehört zu Diff.form. sphär. Dreyecke 58; und ist

dorten	c	b	a	B	C
hie	ZP	ZB	PB	ZPB	ZB Ø P

Wenn man also ZBP, durch B ausdruckt so ist

dPB = — tang B. sin PB. d ZPB

Nun ist dPB = m; dZPB = — p (352) also

m = + tang B. cos D. p

Und weil ohne merklichen Fehler m = b (273)

355. So kömmt $\frac{\cot B.\ b}{\cos D} = p$

356. Man berechne also aus der beobachteten Höhe, und der Abweichung D, den parallactischen Winkel B; nach (9) oder aus dem Stundenwinkel,

wo $\sin B = \frac{\cos \varepsilon.\ \sin a}{\cos h}$ Dieses giebt p nach (355)

356 Auch ist die Mittagsverbesserung nach einem Verfahren wie (285)

$\frac{\cot B}{\cos D} \cdot \frac{2b}{30} = q$ Secunden

357.

357. Hr. de la L. Astr. 631. I Ausg. 933 II. A. empfiehlt dieses Verfahren einem Beobachter dem die vorhin erwähnten Tafeln mangelten, weil der parall. W. leicht zu berechnen ist.

Er erwähnt daß Hr. de la Caille eine Tafel nach diesem Grunde berechnet, wo man Stunde u. Sonnenhöhe aufsucht das Verlangte zu finden. Sie könne aber einen Fehler von $\frac{1}{3}$ einer Secunde geben, weil für gleiche Abweichungen die Veränderung nicht zu allen Jahrszeiten gleich ist. (300)

Stundenwinkel, bey dem die Verbesserung ohne Abweichung bestimmt wird.

358. Aus 285 erhellt, daß dieß für $a = 90°$ statt findet.

Die Verbesserung bey diesem Stundenwinkel, ist nur deßwegen einen Tag anders als den andern, weil die tägliche Aenderung der Abweichung nicht einen Tag wie den andern ist.

Welche Zeit am besten ist übereinstimmende Höhen zu nehmen.

359. Diese Frage ist schon (25) beantwortet.

Schriftsteller welche von der Mittagsverbesserung gehandelt haben.

360. Eine Vorschrift, die aber erst zur Rechnung bequem müßte ausgedruckt werden, steht in Smiths Lehrbegr. d. Opt. 3 B. 108 §. In meinen Anmerkungen dazu habe ich noch Euler Comm. Pe-

trop. T. VIII; p. 48; d' Alembert Mem. de l'Ac. de Prusse 1747; p. 144, Maupertuis Astr. naut. prob. XI; Klingenstierna Abh. d. K. Schw. Ak. d. W. 1746; in meiner Uebers. VIII. B. 100 S. angeführt, denen sich noch mehr beyfügen liessen. Die Regeln kommen aber alle im Wesentlichen mit den angeführten auf eines hinaus.

Ich kenne jezo nur noch aus einer Recension in den frankfurter gel. Anz. 1772; n. 6; nachstehendes Buch: Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia for promoting useful knowledge Vol. I. from Ian. 1; 1769 to Ian. 1 1770; 4 Philadelph. 1771. Es befindet sich darinnen eine Methode, die Zeit des Mittags aus übereinstimmenden Höhen, ohne Hülfe der Correctionstafeln, vermittelst der Veränderung in der Abweichung der Sonne herzuleiten.

Man kann dieses von solchen Formeln wie (308) sagen, aus denen sich die Tafeln berechnen lassen. Soll das Verfahren in angeführter Sammlung einen Vorzug verdienen so müssen die Vorschriften noch kürzer und bequemer seyn.

Hr. Bernoullis Einwendungen, gegen das Verfahren, die Zeit des Mittags aus übereinstimmenden Sonnenhöhen zu finden, und desselben Methode die Zeit zu bestimmen.

361. Hr. Joh. Bernoulli, kön. Astronome zu Berlin, hat im Recueil pour les Astronomes (welcher

cher zu Berlin 1771 auf seine Kosten herausgekommen ist) T. I; p. 29 einige Unbequemlichkeiten dieses Verfahrens angezeigt.

Der Himmel ist nicht allemahl zugleich vormittags u. nachmittags zu den gehörigen Zeiten heiter, es ist mit diesem Verfahren Zeitverlust, und wegen der Berichtigung der jedesmahligen Stellung des Quadranten, Mühe verbunden, wozu noch die Unbequemlichkeiten der Hitze im Sommer, der Kälte im Winter kommen, und der Nachtheil, den diese öftere Beschäfftigung mit der Sonne, doch endlich den Augen zuziehen kann. Man muß sich auf die Uhr verlassen können daß sie vom Mittage an, bis auf die Zeit der Nacht da die Beobachtung soll angestellt werden ihren Gang ungeändert behält. Im Winter, machen die Refractionen, die langsamen Aenderungen der Höhen, vieles ungewiß, undzu dieser Jahreszeit läßt sich das Verfahren, oft wegen der veränderlichen Witterung nicht bewerkstelligen.

In den Lettres Astronomiques (Berl. 1771; auch bey dem Verfasser) meldet Hr. Bernoulli im 11 Brief, daß Hr. le Monnier auch nicht viel auf die übereinstimmenden Sonnenhöhen baue, besonders wegen der Veränderlichkeit der Refractionen.

Daß die Refractionen nachmittage anders sind, als vormittage, hat auch unser Mayer bemerkt wie ich in einem seiner Manuscripte die von Kön. Reg. für hiesiges Observatorium gekauft worden, gefunden habe. Er hat aber weder die Art wie er sich davon versichert hat, noch den Unterschied angezeigt.

362. Hr. B. schlägt daher zu Bestimmung der Zeit, das Fernrohr in der Mittagsfläche vor, so zu gebrauchen, daß man Sterne durchgehen läßt und aus dem Unterschiede zwischen den Rectascensionen des Sterns und der Sonne, die wahre Zeit des Durchganges des Sterns findet.

Dieses Verfahren erfodert, daß man die Stelle des Sterns, besonders seine Rectascension sehr genau weiß. Die welche man als eine mittlere, für eine gewisse Epoche, in einem genauen Verzeichnisse von Fixsternen findet, muß man durch das Fortrükken der Nachtgleichen, die Abirrung wegen der allmählichen Fortpflanzung des Lichtes, die Nutation der Erdaxe, verbessern. Hr. Bernoulli hat dieses Verfahren durch ein Verzeichniß dazu brauchbarer Sterne, nebst dem was sonst dabey nöthig ist, so bequem als möglich zu machen gesucht.

363. Ohnstreitig ist es eine sehr grosse Bequemlichkeit ein Fernrohr in der Mittagsfläche zu haben; übereinstimmende Höhen aber sind doch anfangs nöthig das Fernrohr in die Mittagsfläche zu bringen, und sie bleiben nachgehends immer das sicherste und bequemste Mittel desselben Stellung zu prüfen und zu berichtigen.

Wer also ein Fernrohr in der Mittagsfläche hat der wird meines Erachtens wohl thun den Mittag an der Sonne selbst zu beobachten. Verhindert die Witterung dieses, so kann Hr. B. Methode mit Sternen nützlich seyn.

Wie es sich mit dem Gange der Uhr verhält läf

sich leicht so beurtheilen; Man beobachtet Durchgänge von Fixsternen, die Nacht der Beobachtung, die vorhergehende, und die folgende; Weil die Zeit zwischen zween nächsten Durchgängen jeden Fixsterns allemahl ein Sterntag ist, so sieht man leicht wie die Uhr geht, wenn man die Zeit welche sie zwischen zween Durchgängen eines Fixsterns zeigt, mit der vergleicht welche sie zwischen zween Durchgängen eines andern zeigt.

Bey den Uhren die von dem hiesigen Bauherrn u. Mechanico Hr. Kampen vorlängst für das hiesige Observatorium sind verfertigt worden, hat mich die Erfahrung versichert, daß man sich einige Tage lang auf die Gleichförmigkeit ihres Ganges verlassen darf welches Hr. B. (Rec. 46 S.) von den englischen rühmt und ich habe mich daher gewundert in des Hr. de la Lande Astr. zu lesen daß man übereinstimmende Sonnenhöhen, nicht gern mehr als 3 Stunden vom Mittage nehme, um sich auf den Gang der Uhr diese Zeit über desto sicherer zu verlassen. Dieses setzt zum voraus, daß auswärtige Astronomen manchmahl Uhren brauchen müssen, die nicht so gut sind als die genannten.

Bey diesen Beobachtungen von Durchgängen der Fixsterne, nur für den Gang der Uhr, braucht man sich um Abirrung, Nutation u. d. g. nicht zu bekümmern, wenn man die Zeit des Mittags aus der Sonne hat.

Wie man den Unterschied der Rectascensionen der wahren u. der erdichteten Sonne in Zeit verwandelt.

zu Astr. 250 u. f.

364. Die astronomischen Tafeln, kann man nicht nach wahrer Zeit einrichten, weil diese nicht immer von gleicher Grösse ist (Astr. 251) man bedient sich also bey ihnen der mittlern; und so muß man wissen, wieviel der mittlere Mittag von dem wahren unterschieden ist (Astr. 250) um eine Zeit in die andere zu verwandeln.

365. Dieser Unterschied, bestimmt sich ohnstreitig aus dem Unterschiede der Rectascensionen beyder Sonnen, der wahren und der erdichteten, am wahren Mittage; Ist der erdichteten Rectascension grösser, so kömmt sie später in den Meridian, als die wahre, oder der mittlere Mittag ereignet sich nach dem wahren; und umgekehrt.

366. Diesen Unterschied in Zeit zu finden haben sich die alten Astronomen folgendergestalt verhalten: Sie haben den Unterschied beyder Rectascensionen, in Sternzeit verwandelt, und geglaubt der mittlere Mittag ereigne sich soviel später oder eher, als der wahre, soviel diese Zeit betrage.

367. Weil man sich aber in den astronomischen Rechnungen nicht der Sternzeit, sondern der mittlern bedient, so hat Hr. de la Caille geglaubt, man müsse den Bogen (365) in mittlere Zeit verwandeln. Er hat dieses als eine Verbesserung eines

ge=

gemeinen Irrthums angegeben und darnach die XIIII. seiner Sonnentafeln berechnet (Tabulae Solares quas e nouiss. suis obseruat. deduxit N. L. de la Caille cet. Paris 1758; 4; der Hr. P. Hell hat diese Sonnentafeln nebst den ältern mayerischen Mondstafeln seinen Ephemerid. für 1764 beygefügt)

368. Hr. de la Lande aber behauptet, des Hr. de la Caille Meynung sey unrichtig, und man müsse die Verwandlung nach Art der älteen Astronomen vornehmen. Er lehret dieses in den Mem. de l' Ac. des Sc. 1762; p. 131 u. seiner Astron. 669 I. Ausg. 976; II. Ausg.

Er hat aber seine Schlüsse nur auf ein Exempel angewandt, nicht allgemein ausgedruckt, daher auch manche Astronomen nicht überzeugt, unter denen sich auch der P. Hell befindet.

369. Dieserwegen, habe ich auf eine allgemeine analytische Art, untersucht, was hierinnen wahr ist und glaube Hrn. de la Lande und der ältern Astronomen Satz bewiesen zu haben. Meine Untersuchung ist d. 7. April 1770 in der hiesigen Kön. Soc. der Wiss. vorgelesen worden, und befindet sich in den Nouis Comment. Soc. Sc. Gott. T. I. p. 90. Ich theile hie das Wesentliche daraus mit.

370. Der Sonne wahre Rectascension sey $= \beta$ ihre mittlere, welche mit der mittleren Länge einerley ist $= b$ (Astr. 250)

371. Die mittlere wächst innerhalb 24 mittlern Stunden um $59' 8''$ (Astr. 244;) Wenn ich diese Grösse als eine Zahl p ansehe deren Einheit ein

Grad ist so ist $p = \frac{59.60 + 8}{3600} = 0,985555\ldots$

372. Im Augenblicke des wahren Mittags, befinde sich die erdichtete Sonne (Astr. 250) in einem Stundenkreise, der mit dem Meridian einen Winkel von n Graden, gegen Osten mache.

373 Sie kömmt also, nach der wahren in die Mittagsfläche, oder, der mittlere Mittag, ereignet sich später als der wahre. Ich frage wie viel dieses in Zeit beträgt.

375. Ich bezeichne die Theile der wahren Zeit mit H, M, S, wie in (42; V) der Sternzeit und der mittlern wie in (54; 58;)

376. Der Bogen des Aequators, um welchen die erdichtete Sonne am wahren Mittage, gegen Osten vom Meridian absteht schiebt sich in $\frac{n}{360}.24H$ durch den Meridian. So viel also ereignete sich der mittlere Mittag nach dem wahren, wenn die erdichtete Sonne, diese Zeit über, wie ein Fixstern an der Sphäre stehen bliebe, und nur durch die tägliche Bewegung fortgeführt würde.

377 Aber während dieser Zeit geht sie mit einer eignen Bewegung ostwärts, wenn also der Punct, wo sie im Augenblick des wahren Mittags war, in der Mittagsfläche ist so ist sie noch nicht darinnen.

378. Die Zeit, die wirklich zwischen dem wahren Mittage und dem Antritte der mittlern Sonne an den Meridian verfließt, betrage x mittlere Sonnenstunden.

379

379. In dieser Zeit wächst also die Rectascension der mittlern Sonne um $\frac{x}{24}$. p Grade (371)

380 Vom Augenblicke des wahren Mittags, bis an den Augenblick des mittlern geht also ein Bogen von $n + \frac{x}{24}$. p Graden durch den Meridian (372; 379)

$$n + \frac{1}{24} p.x$$

380. Dieses geschieht in $\frac{}{360}$. 24 H oder

in $(n + \frac{1}{24}.p.x).\frac{1}{15}$ H, wo n, p, x, ungenannte Zahlen sind, nur H eine genannte Zahl, nähmlich eine Sternstunde ist.

381. Eben diese Zeit aber, soll in mittlern Stunden x. h seyn (377). Die beyden Wehrte (380; 381) gleich gesetzt erhält man

$$x = \frac{n}{\frac{15\,h}{H} - \frac{1}{24}.p}$$

382. Die Zeit in welcher der Bogen p durch die Mittagsfläche geht ist $\frac{1}{360}.p.24H = \frac{1}{15}.p.H$

Weil nun der mittlere Tag $= 24h$; so ist

$$24h = 24H + \frac{1}{15}. p. H \text{ oder}$$

$$\frac{h}{H} = 1 + \frac{1}{15.24}. p$$

383 Also in (381.) $x = \frac{1}{15} n$

384 Die Zeit wie spät der mittlere Mittag nach dem wahren folgt findet sich so:

Man drucke den Bogen, um welchen am wahren Mittage die Rectascension der mittlern Sonne grösser ist als die Rectascension der wahren, in Graden aus

So ausgedruckt, dividire man ihn mit 15; so hat man die gesuchte Zeit in **mittlern Sonnenstunden**.

385. Diese Division mit 15; ist aber so viel als ob man den Bogen in Sternzeit ausdruckte. (Astr. 85) Also läßt sich die Regel auch folgendergestalt abfassen:

Den Ueberschuß der Rectascension der erdichteten Sonne über die Rectascension der wahren, verwandle man in Sternzeit;

So viel dieses Sternzeit giebt, so viel mittlere Zeit ereignet sich der mittlere Mittag nach dem wahren.

386 Wenn der mittlern Sonne Rectascension kleiner ist als der wahren ihre, so befindet sich im Augenblicke des wahren Mittags, die mittlere Sonne ostwärts der Mittagsfläche, n ist verneint und der mittlere Mittag hat sich vor dem wahren ereignet, die Zeit findet man eben wie vorhin.

387.

387. In der angeführten Tafel des Hr. de la C. (387) ist der Unterschied der Rectascensionen in mittlere Zeit verwandelt. Will man nun diese Tafel brauchen, so muß man ihre Zahlen so ändern, wie es gegenwärtige Untersuchung erfodert. Das geschieht folgendergestalt:

388 Die Zahl die zum Unterschiede der Rectascensionen, n, in des la C. Tafel gehört heisse y Stunden. Man sucht also die Vergleichung zwischen y u. x (383)

389. Es ist aber $360+p : n = 24 : y$ und

$360+p = \frac{360.h}{H}$ (382) also $y = \frac{24.n\ H}{360\,h} = \frac{x.H}{h}$

(383) daher $x = \frac{y.h}{H} = y.(1+\frac{1}{360}.p)$ (382)

390. Zu des de la C. Zahl addire man also $\frac{1}{360}.py = y.\&\ 0{,}00273765$ weil aus (371) diese Zahl der Wehrt von $\frac{1}{360}$ p ist

391. Man drücke also des Hr. de la C. Zahlen in Secunden aus. Zu dem Logarithmen dieser Zahl addire man log. $\&\ 0{,}00273765$; so hat man den Logarithmen der Secunden welche der Verbesserung zugehören.

392 **Exempel** Für $n = 4^{\circ}$ giebt la C. $15\,m\,57\,s = 957\,s$, also $y = \frac{957}{3600}$ Stunden;

Eigentlich aber schieben sich 4 Grade des Aequators in 15 m 57 l 22 t $\frac{4}{5}$ quart mittlerer Zeit durch, welches 957, 38 l beträgt. Wenn man also diese Zahl, als diejenige braucht welche la C. nach seiner Regel hätte setzen sollen so ist

log 0, 00273765 = 5, 4373779 — 8
log 957, 38 = 2, 9817884

Summe = 0, 4191663

Dieser gehört die Zahl 2, 62, als die Verbesserung; addirt zu 957, 38

giebt 960, 00 = x

welches 16 m beträgt.

Es gehören aber zu 4 Graden des Aequators, 16 M Sternzeit, also stimmt dieses Exempel mit (385) überein wenn man den kleinen Unterschied beyseite setzt den hier Ausdrückungen in Sexagesimal und Decimalbrüchen geben, die der Wahrheit nicht völlig gemäß sind.

Hätte man des la C. Zahl selbst 957 gebraucht so wäre etwas geringers herausgekommen.

393 Der Unterschied beyder Rectascensionen, (392) ereignet sich um den 6 Nov. und ist der größte der statt findet.

Also gehört ihm auch beym la C. das größte y zu.

Und weil sich die Verbesserung (390) wie y verhält, so ist auch die (392) berechnete Verbesserung die größte die statt finden kann.

394. In andern Fälle beträgt die Verbesserung nicht 2, oft nicht ganze Secunden.

395. Wenn sie so geringe ist, so würde ihr Logarithme verneint, welches man vermeiden kann, wenn man die Zahl aus des la C. Tafeln sogleich in kleinen Theilen einer Secunde ausdruckt.

396. **Exempel** Man sucht die Verbesserung, wenn $y = 1\ m$;

Man setze 600000 Zehntausendtheilchen einer Secunde statt y; so ist

$\log 600000 = 5,7781512$

addirt $5,4373779 - 8$ (392)

$3,2155291$

gehört zu 1643 und zeigt also an die Verbesserung sey sey 0,1643 s

Es wäre lächerlich die Verbesserung in diesen Zehntausendtheilchen als richtig anzunehmen, weil sie aber mit geringerer Mühe gefunden werden als nur ein Zehntheilchen durch die gewöhnliche Division, so kann man leicht die Zifern die nicht zuverlässig scheinen wegwerfen.

397. Hr. de la lande giebt a. a. O. der Memoires (368) 1:6 Seite, eine Tafel der Verbesserungen, die zu des la C. Zahlen von 1 m bis 16 m zu setzen sind in Zehntheilen einer Secunde; in dem Exempel (396) giebt er die Verbesserung 01

Den Durchgang der Planeten durch die Mittagsfläche zu berechnen.

398. Für einen gegebenen Mittag hat man, die Rectascensionen der Sonne und eines Planeten, auch weiß man, wieviel diese Rectascensionen, zwischen

schen diesem Mittage und dem nächsten wachsen. Man sucht die Zeit wenn der Planet durch die Mittagsfläche geht.

399. Ich setze des Planeten Rectascension sey grösser als der Sonne ihre. Man bringt die Rechnung die nach dieser Voraussetzung geführt wird leicht auf den entgegen gesetzten Fall.

16 ff. 400. Die 16 Fig. stelle den Aequator in der beweglichen Himmelskugel vor. Auf ihm sind die Aequinoctialpuncte bezeichnet.

Die Rectascensionen zählt man wie bekannt nach der Ordnung der Zeichen

Wenn an einem Mittage, die Abweichungskreise der Sonne und des Planeten, den Aequator in A, L, schneiden so sind ihre Rectascensionen ♈ A; ♈ Mer ♎ L; den nächsten Mittag, endige sich die Rectascension der Sonne in B, des Planeten seine in O; Ich nehme an, die genannten Bogen und ihre Aenderungen in einem Tage, A B, L O, sind gegeben.

401. Der Unterschied der Rectascensionen, des Planeten und der Sonne, an dem ersten Mittage sey α; die Veränderungen sind, $A B = \theta$ für die Sonne, $L O = \delta$ für den Planeten, der Planet komme in deu Meridian nachdem z wahre Stunden nachmittag verflossen sind.

402. Weil man annehmen darf, die Rectascension wachse einen Tag über gleichförmig, so wächst des Planeten Rectascension in z Stunden um den

$$\text{Bogen } L N = \frac{1}{24} z \delta$$

403.

403. Man stelle sich nun vor, die Stelle wo Mer steht sey in der unbeweglichen Sphäre im Meridiane, der Kreis aber, mit den bezeichneten Puncten in ihm, ist der bewegliche Aequator (400) und dreht sich von Morgen gegen Abend, von der linken dessen der die Figur ansiht, gegen die rechte.

So gehen unter der Stelle die mit Mer bezeichnet ist, andere und andere Puncte des Aequators durch. In der Lage welche die Figur zeigt sind A, B, durchgegangen, ♎, L, N, O, werden durchgehn.

Von dem Mittage also da A im Meridiane war, bis an den Augenblick, da der Planet in den Meridian kömmt schiebt sich durch den Meridian der

$$\text{Bogen } AB \text{♎} LN = \alpha + \frac{1}{24} z\delta$$

404. Wenn also 2π den ganzen Umfang des Kreises für den Halbmesser $= 1$ bedeutet so giebt in der Proportion $2\pi : \alpha + \frac{1}{24} z\delta = 24 H$:

$\frac{24\alpha + z\delta}{2\pi}$. H, das letzte Glied, die Zeit zwischen dem Mittage und des Planeten Durchgange durch die Mittagsfläche, in Sternstunden.

405. Weil nun eben diese Zeit $=$ z. ℌ (401) in wahren Stunden ist, so giebt sich z, wenn man H durch ℌ ausdrücken kann.

406. Dieß geschieht folgendergestalt: Vom ersten Mittage bis zum zweyten geht durch den Meridian

ridian der Bogen $2\pi + \theta$ (401) in $\frac{2\pi+\theta}{2\pi}$. 24 H Sternstunden.

Weil nun diese Zeit in wahren Stunden 24 H heißt, so ist $(2\pi+\theta)$. H $= 2\pi$. H

407; Also nach (405) $z = \frac{24\alpha + z\delta}{2\pi+\theta}$ daher

$$z = \frac{24\alpha}{2\pi+\theta-\delta}$$

408. Mit Worten läßt sich die Regel so ausdrucken:

Den Unterschied der Rectascensionen, in Theilen des Kreises ausgedruckt, multiplicire man mit 24;

Das Product dividire man durch die Summe der Peripherie und des täglichen Wachsthums der Rectascension des ~~Planeten~~ Sonne, um das tägliche Wachsthum der Rectascension der ~~Sonne~~ Planeten vermindert.

Der Quotient ist die Zeit, wie lange nachmittage der Planet durch den Meridian geht, in wahren Stunden.

409. I Wenn $\delta = 0$, so verwandelt sich der Planet in einen Fixstern, für denselben ist also

$$z = \frac{24\alpha}{2\pi+\theta}.$$

II. Diese Formel giebt wahre Zeit, wie die 43; II; Sternzeit. Mit dieser Bemerkung läßt sich auch eine so gleich in die andere verwandeln. Wenn man in 43; statt $\gamma - \beta$ dieser Grösse hiesiges Zeichen

chen α; setzt und H durch ℌ nach (406) ausdruckt so verwandelt sich die dortige Formel in die hiesige.

Exempel zu 409.

410. Man sucht des hellen Sterns in der Leyer Durchgang durch die Mittagsfläche nach dem Mittage, d. 1. Mart. 1760.

Hr. de la Lande giebt dieß Exempel 689 §. I. Ausg. 994; II. A. Nach den von ihm angegebenen Zahlen ist

Rectasc. des Sterns 277° 12′ 17″
der Sonne 39 2 15

α = 238 10 2

Auch nach Hr. de la L. das tägliche Wachsthum der Rectascension der Sonne, in Zeit 3 M 49 S; dieses giebt in Bogen θ = 57′ 25″

Wenn man die beyden jezt gefundenen Bogen, so wohl als $2\pi = 360°$ in Secunden ausdruckt so hat man $z = \frac{24.857402}{1299375}$

Weil sich so grosser Zahlen Quotient nicht merklich ändert wenn jede von ihnen um was Geringes verändert wird, so berechnet man dieß vermittelst der Logarithmen folgendergestalt:

log 857400 = 5,9331835
log 24 = 1,3802112

7,3133947
log 1299300 = 6 1137094

log z = 1,1996853

gehört zu einer Zahl, die zwischen 15, 837 und 15, 838 fällt

Dieser Quotient ist ein wenig zu groß, weil der Divisor etwas zu klein ist angenommen worden.

Nimmt man statt des Logarithmen des Divisors, log 1299400, etwas zu groß, aber nicht so viel zu groß als der vorige Divisor zu klein angenommen ward; so bekömmt man für z einen Logarithmen dessen Zahl zwischen 15, 836 u. 15, 837 fällt.

Man weiß also die Zeit mit einer Unsicherheit, die noch nicht 0, 002 einer Stunde, das ist noch nicht 7, 2 Secunden beträgt.

Nimmt man 15, 836; so ist 0, 836.60 = 50, 16 und 0, 16.60 = 9, 6 also die gesuchte Zeit

19 H 50 M 9 S

Eben das findet Hr. de la L. a. a. O. er bedient sich aber dreyer Näherungen nach einander, und einer Art von Regel Falsi, da er den Unterschied der Rectascensionen für den Augenblick des Durchganges, erräth, oder sonst woher weiß.

411. Bey meinem Verfahren, ist nichts mühsam, als die Verwandlung der Bogen in Secunden. Diese kann man sich folgender gestalt erleichtern.

Man drucke alle Minuten nach einander von 1 bis 60 in Secunden aus;

Ferner alle Grade von 1 bis 10;

Ferner 10; 20; 30; 40; u. s. w. bis 100 Grade,

Ferner 200; 300; Grade.

Diese Grössen, jede in Secunden ausgedruckt geben eine Tafel, in welcher man allsdenn die gegebe-

nen

nen Bogen aufsuchen und durch blosses Addiren, in Secunden ausdrucken kann.

412. Berechnungen wie gegenwärtige, werden eigentlich nicht angestellt, durch sie den Augenblick des Durchgangs, aufs schärfste zu finden. Man verlangt ihn nur ohngefähr, damit man sich um die Zeit wenn der Durchgang geschehen wird, zur Beobachtung fertig machen kann, und nicht, wie ohne sie geschehen könnte, zu lange auf den Durchgang paßt, oder ihn versäumt.

Also hat bey ihnen eine Ungewißheit von einer oder ein paar Minuten nicht viel zu bedeuten, und man kann sich mit einer viel geringern Schärfe befriedigen, als eine Rechnung wie (410) giebt.

413. Wenn man die Rechnung nur so obenhin führen will, kann man annehmen, daß sich der Sonne Rectascension täglich etwa um 1 Grad ändere.

Für den Mond beträgt diese tägliche Aenderung etwa 15 Grad.

Zieht man also hie die Veränderung der Rectascension der Sonne nicht in Betrachtung, weil sie, mit der Veränderung der Rectascension des Mondes verglichen so geringe ist so giebt sich aus (407) die Formel für den Mond folgendergestalt

$$z = \frac{24\,\alpha}{2\pi - \delta}$$

414. Exempel Hr. de la L. Astr. 690; I. A. 998 II. A. setzt am 22 April, des Mondes Rectascension, 12 St grösser als der Sonne ihre also

$\alpha = 180°$; auch nimmt er $\delta = 15°$ dieses giebt mir

$$z = \frac{24.180}{360 - 15} = \frac{180.24}{15.23} = \frac{12.24}{23}$$

Hr. de la L. sucht wiederum diese Zeit durch eine weitläuftigere Rechnung, die ihn auf eine Art von Reihe führt dadurch er die Zeit immer genauer u. genauer bestimmt. Nach seiner Methode muß man zu $12 + \frac{1}{2}$ das Product aus $\frac{1}{x}$ in die Summe der Potenzen von $\frac{1}{24}$ addiren; diese Summe ist $\frac{1}{23}$ (Anal. endl. Gröss. 109 §) und so kömmt meine Zahl heraus.

Diese Zeit ist, wie sie Hr. de la L. berechnet 12 H 31 M 18 S.

Exempel zu 407;

415. Ich will zu dieser Absicht das Exempel (414) beybehalten, aber die Veränderung der Rectascension der Sonne mit in Betrachtung ziehen. Aus des P. Pilgram Ephemerid. für 1770; ist sie vom 22 Apr. bis 23 Apr. $56' 10''$. Ich will also $\theta = 56'$ nehmen, das Uebrige wie (414) So ist

$$z = \frac{24.180°}{360° + 56' - 15°} = \frac{24.180.60}{345.60 + 56}$$

Dieser Bruch mit 4 aufgehoben giebt

$\frac{64800}{5189} = 12,488$ wie ich durch die Logarithmen finde; wo $0,488.60 = 29,28$ also geschähe der Durchgang nachmittage 12 St 29,28 M

416. Die Rechnungen beyder vorhergehenden Absätze mit einander verglichen, zeigen wie wenig die

die Zeit des Durchganges verändert wird, wenn man die Veränderung der Rectascension der Sonne mit in Betrachtung zieht, daß man also zu der Absicht (412) die Formel (413) brauchen darf.

417. Uebrigens erklärt Hr. de la L. die Berechnung für den Mond, für die beschwerlichste, weil sich des Mondes Rectascension so stark ändert: Er nimmt auch in seinen Exempeln dazu, solche Zahlen an, dadurch die Beschwerlichkeiten dieser Rechnung soviel als möglich vermindert werden.

Nach der Formel 407; läßt sich diese Rechnung auch bey dem Monde, schärfer als nöthig und was für Zahlen auch dazu gegeben sind, zugleich leichter führen, als nach Hr. de la L. Methode für solche Fälle wo die Schwürigkeiten soviel sich thun ließ weggeschafft sind.

Ausdruck dieser Formeln in Zeit.

418. Bogen mit 15 dividirt geben bekanntermassen Sternzeit.

Nun ist (407) $z = \frac{24.\frac{1}{15}\alpha}{\frac{1}{15}.2\pi + \frac{1}{15}(\theta - \delta)}$

Statt $\frac{1}{15}.2\pi$ kann man 24. H schreiben, und so gehöre zum Bogen α Sternzeit τ

θ λ

δ μ

Allsdenn ist $z = \frac{24\tau}{24H + \lambda - \mu}$

419. Dieses dient wenn die Bogen in Sternzeit gegeben werden, wie gewöhnlich ist.

Man drückt allsdenn Alles in Secunden Sternzeit aus.

Dieses verrichtet man bequem vermittelst einer Tafel welche alle Minuten u. Secunden angiebt, die in jeder ganzen Zahl Stunden von 1 bis 24 enthalten sind; imgleichen alle Secunden die in jeder Zahl Minuten von 1 bis 60 enthalten sind.

Exempel zu 418

420. Ich will das (419) wiederhohlen,

wo $\mu = 0$;

$\tau = 15\,H\ 52\,M\ 40\,S$

$\lambda = 3\ 49$

Vermöge der in (419) erwähnten Tafel sind

$15\,H = 54000\,S$

$52\,M = 3120$

40

$\tau = 57160\,S$

Eben so $\lambda = 229$

$24\,H = 86400$

Daher $z = \frac{24.57160}{86629} = 15,836$ wie vorhin

Zweytes Exempel zu 418

421. Da man beym Monde λ weglassen kann (416) so kann man das Exempel 414; gleich aus

den

den gegebenen Zahlen, hinschreiben $z = \frac{24.12}{23}$

422. Wenn eines Planeten Rectascension $\curlyvee S$, kleiner als der Sonnen ihre $\curlyvee A$ ist, so daß $\curlyvee A - \curlyvee S = a$; sucht man des Planeten Durchgang durch die Mittagsfläche:

Alles Uebrige bleibt.

423. Dieses leite ich aus Vorhergehenden folgendergestalt her.

In z wahren Stunden wächst des Planeten Rectascension um den Bogen $ST = \frac{1}{24} z \delta$

Von dem Mittage also, da der Punct des Aequators A mit der Sonne im Meridiane war, bis an den nächsten Durchgang des Planeten durch die Mittagsfläche, geht der Bogen des Aequators $AB \curlyvee ST$ durch den Meridian.

Dieser Bogen ist $= 2\pi - AT$;

Aber $AT = a - \frac{1}{24} z \delta$

Also dieser Bogen $= 2\pi - a + \frac{1}{24} z \delta$

Dieser braucht durch die Mittagsfläche zu gehen $\frac{(2\pi - a).24 + z\delta}{2\pi}$. H Sternstunden wie in (404)

Weil nun eben die Zeit z. H ist so hat man aus

$$(406)\ z = \frac{24.(2\pi - a)}{2\pi + \theta - \delta}$$

424. Und wenn t die Sternzeit heißt, die dem Bogen a zugehört $z = \frac{24.(24H - t)}{24H + \lambda - \mu}$

Exempel zu 424.

425. Man sucht des Mondes Durchgang durch die Wiener Mittagsfläche, d. 21. May 1770.

Aus des P. Pilgram Ephem. ist

d. 21 May Rectascension

der Sonne	3 H	52 M	33, 7 S
des Monds	0	38	36
t =	3	13	57,7

= 11637,7 S

24 H — t = 74762, 3

Rectasc. der ☉

den 21 May =	3 H	52 M	33, 7
22	3	56	34, 2
λ =		4	0, 6

Rectasc. ☾

d. 21. May =	0	38	36
22 =	1	31	42
μ =		53	6
λ =		4	
λ — μ = —		49 —	6 = — 2946 S

24 H + λ — μ = 83454 S

Also $z = \frac{24.74762}{83454}$

giebt vermittelst der Logarithmen

z = 21, 495 = 21 ☿ 29, 7 ☽;

In

In des Pilgram Ephem. stehn 21 ☿ 28 ☽ 33 ☌ 426 Wie also gegenwärtige Rechnung zu der angezeigten Absicht, scharf genug ist, so kömmt der geringe Unterschied zwischen ihr und des P. Pilgrams genauerer, ohnstreitig mit daher daß sich des Mondes Rectascension, 24 Stunden nicht gleichförmig ändert.

427. Vorhergehendes 398. . . 426; befindet sich als eine Zugabe bey dem 369 angeführten Aufsatze.

Aus dem Durchgange eines Planeten durch einen Mittagskreis, seinen Durchgang durch einen andern zu berechnen.

428. CA 17 F. bedeutet eine gewisse Mittagsfläche, CB eine die um θ Zeit Secunden westlicher liegt; 17 f.

Man weiß wenn ein Planet einen Tag durch CA geht und wenn er den nächstfolgenden Tag auch dadurch geht;

Zwischen diesen beyden Durchgängen durch CA, geht er auch durch CB

Man sucht die Zeit wenn dieses geschiht.

429. Zwischen dem ersten und zweyten Durchgange durch A, verstreichen 24 ☿ + n. ☌

430. Wenn B um θ Secunden westlicher liegt als A, so würde ein Weltkörper der keine eigene Bewegung hätte, in so viel Secunden Sternzeit aus A in B durch die gemeine Bewegung geführt.

431. Soviel Zeit verstreicht zwischen den Durchgängen eines Fixsterns durch A u. durch B.

431. In dieser Zeit aber, rückt der Planet ver-

mittelst seiner eignen Bewegung, aus A in einen Stundenkreis CM fort der ostwärts A liegt;

432 Wie viel Zeit der Bogen des Aequators der das Maaß des Winkels ACM ist, braucht durch den Meridian zu gehen, findet sich folgendergestalt:

In 24 ♄ + n ☉; wächst des Planeten Rectascension, um einen Bogen, der die Zeit n. ☉ braucht durch den Meridian zu gehen.

Macht man also die Proportion

$$24\,♄ + n.\,☉ : n\,☉ = \theta : \frac{n.\theta}{86400 + n}$$

so gieb ihr letztes Glied, in Sternsecunden die Zeit, die ein Bogen durch den Meridian zu gehen braucht, um den die Rectascension in θ. S wächst, das ist, die des Winkels A C M Maaß braucht, durch den Meridian zu gehen.

433. Finden nun gemeine und eigne Bewegung zugleich statt, so muß sich in der Zeit da der Planet aus A in B kömmt, das Maaß des Winkels M C A + A C B durch den Meridian schieben.

434. Heißt also die Zeit wenn der Planet in A ist T, so ist die Zeit wenn er in B ist

$$T + \left(\frac{n}{86400 + n} + 1\right).\ \theta.\ S$$

435. Diese Zeit zählt A wenn der Planet in B ist, weil aber B in eben dem Augenblicke θ. S weniger zählt, so zählt man unter dem Mittagskreise B; wenn der Planet durchgeht $T + \frac{n.\theta}{86400 + n}.\ S$

436.

436. **Exempel** Den 26 Oct. 1770 beobachtete ich den Durchgang des Monds durch die Mittagsfläche zu Göttingen. Des Mondes Mittelpunct befand sich in der Mittagsfläche um 6 H 15 M 27 S; ich frage welche Zeit man in Paris gezählt hat als der Mond durch den pariser Meridian ging.

Paris liegt 30 M 16 S westlicher als Göttingen also ist $\theta = 1816$. Nach der Connoissance des Tems wächst des Mondes Rectascension, selbigen Tag um 45 M, Secunden werden nicht angegeben; also ist $n = 2700$; Folglich zählte man beym Durchgange durch den pariser Meridian, daselbst $\frac{2700.\ 1816}{89100} = 55{,}031$ Secunden mehr als zu Göttingen, beym Durchgangange durch den göttingischen Meridian

Also zu Göttingen	6 H	15 M	27 S
addirt			55
zu Paris	6	16	22

In der Conn. d. T. ist der Durchgang des Monds selbigen Tag 6 H 16 M angesetzt; Secunden werden dabey nie angegeben weil dergleichen Bestimmungen nur die (412) angezeigte Absicht haben.

437 Daher ist es auch verstattet in der Rechnung 429 u. f. Secunden unterschiedener Zeit als gleichgültig zu brauchen.

438. Man heisse die Zeit welche der westliche Mittagskreis, von seinem Mittage an bey des Planeten Durchgange zählt V;

Diese

Diese Zeit ist durch die Formel (435) gegeben und daraus folgt $T = V - \frac{n.\theta}{86400+n}.S$

Die Zeit T zu finden, welche der östliche Mittagskreis, beym Durchgange des Planeten durch ihn zählt, wenn die Zeit V gegeben welche der westliche beym Durchgange durch ihn zählt

439. Exempel Der Mond gieng 1762 durch den Pariser Meridian den 5 Nov um 2 H 44 M; den 6 um 3 H 44 M; Man fragt wenn er den 6 Nov, durch den maynzer Meridian gieng der 24 M östlicher als der pariser ist.

Hier ist also $n = 60.60$; $\theta = 24.60$; $V = 3$ H 44 M; Was man also davon abziehen soll ist $\frac{24.60}{25} = 57,6$ und $T = 3$ H 43 M 2 S

440 Das Exempel steht beym Hr. de la L. Astr. 694; I A. 1004 II. A. Er zieht 1 M ab; und seine Regel, in meinen Zeichen ausgedruckt befiehlt $\frac{n.\theta}{86400}.S$ zur Zeit des östlichen Meridians zu addiren (435) oder von der Zeit des westlichen abzuziehn (438)

Man sieht leicht daß diese Regel annimmt des Planeten Rectascension wachse in 24 St um n S; Sie wächst aber um so viel in 24 St + n S

Hr. de la L. befriedigt sich hie mit einem Ausdrucke der nur beynahe wahr ist, und das ist allerdings

ver-

verstattet wenn man sich nur überzeugt hat warum es verstattet ist. (436)

Anwendung hievon auf Planeten die langsame eigne Bewegung haben.

441. Wenn ein Planet seine Rectascension in einem Tage um was geringers ändert als die Sonne, ohne gleichwohl rückgängig zu seyn, so beträgt die Zeit, zwischen seinen beyden nächsten Durchgängen was geringers als 24 H;

Diese Zeit nähmlich übertrifft 24 Sternstunden nicht so viel als der wahre Sonnentag.

442. In diesem Falle ist also n (429) verneint, woraus leicht zu sehn ist wie die Formeln 435;438; hie zu brauchen sind.

443. Exempel. Nach den Wiener Ephemeriden, geht Saturn durch den Wiener Meridian 1772

d. 1. April 8 H 57 M

7 8 34

Unterschied 23 M = 23. 6. 10 S

Von diesem Unterschiede in 6 Tagen, kommen also auf einen Tag 230 S oder die Zeit zwischen den beyden Durchgängen Saturns den 1 u. d. 2 April wäre 24 H — 230 S

Also n = — 230; Paris liegt 56 M 10 S westlicher als Wien, wollte man also den Durchgang für den 1 April zu berechnen, so wäre θ = 3370 und weil in (435) T = 8 H 57 M; so gäbe die dortige Formel für die pariser Zeit des pariser

Durch=

Durchganges $8\,\mathfrak{h}\,57\,\mathfrak{M} - \frac{230.337^{\circ}}{86170}\,\mathfrak{s}$;

Das was abgezogen werden soll, findet sich 8,995 s
also wäre die gesuchte Zeit 8 h 56 M 51 S

Sie ist in der Conn. 8 h 56 M angesetzt, weil überhaupt diese Zeiten nicht in der größten Schärfe angegeben werden.

Stundenwinkel, für eine geringe Höhe.

444. Der halbe Tagebogen (17) heisse T; Für eine geringe Höhe h, die man statt ihres Sinus setzen darf, sey der Stundenwinkel $= t$; so ist (9)

$$\operatorname{col} t = \frac{h}{\operatorname{col}\varepsilon\ \operatorname{col}\delta} + \operatorname{col} T$$

Daraus erhält man, höhere Potenzen von h weggelassen,

$$\sin t = \sin T - \frac{\cot T.\, h}{\operatorname{col}\varepsilon\ \operatorname{col}\delta}$$

Folglich, nach gehöriger Rechnung

$$\sin (T - t) = \frac{h}{\operatorname{col}\varepsilon.\ \operatorname{col}\delta.\ \sin T}$$

Und, weil $T - t$ klein ist, also statt seines Sinus darf gesetzt werden

$$t = T - \frac{h}{\operatorname{col}\varepsilon.\ \operatorname{col}\delta.\ \sin T}$$

Halber Tagebogen mit Betrachtung der Parallaxe und Refraction.

445. Aus Astr. 158. Anm. ist
wahre Höhe = Scheinb Höhe + Parall — Refract

Wenn

Wenn ein Weltkörper im Horizonte erscheint so ist seine scheinbare Höhe = o

Also seine wahre = Horizontalparallaxe — Horizontalrefraction.

446. Dieses also = h gesetzt und den halben Tagebogen nach (17) berechnet giebt vermöge der Formel (444) den Stundenwinkel für diese geringe Höhe h;

447 Diesen nennt man zuweilen des Weltkörpers halben Tagebogen. Hr. de la Lande Astron. 703 I Ausg. 1013 II. Ausg.

Exempel

448. Man verlangt für Paris wo die Polhöhe 48° 50' ist, den halben Tagebogen des Mondes zu einer Zeit, da seine nordliche Abweichung 25° 8', die Horizontalparallaxe 58'; die Horizontalrefraction 33' ist

Also ist h = 25' = 1500''

Zuerst für T

log tang ε = 10,0582865
log tang δ = 9,6713060

log cos T = 9,7295925

Durch Proportionaltheile aus Gellibrands Tafeln finde ich daß dieser Logarithme log lin 32° 26' 51'' ist, die Ergänzung dazu ist 57 33 9
und der stumpfe Bogen T = 122 26 51

Fer-

Ferner

$\log \cos \varepsilon = 9,8183919 - 10$
$\log \cos \delta = 9,9568030 - 10$
$\log \sin T = 9,9262704 - 10$

$0,7014653 - 1$
von $\log h = 3,1760913$

$3,4746260$
gehört zu $2928'',8 = 49' 43''$
von $122° \quad 26' \quad 51''$

$t = 121 \quad 37 \quad 8$

449 Hr. de la L. hat eben dieses Exempel berechnet und findet $121° 38'$ weil er die Rechnung nicht in grosser Schärfe führt. Er berechnet nach den gewöhnlichen Regeln der sphärischen Trigonometrie das Dreyeck ZSP 1 Fig. wo $ZS = 89° 35'$

450 Weil $\sin T = \sqrt{(1 - (\frac{\sin \varepsilon . \sin \delta}{\cos \varepsilon . \cos \delta})^2)}$

so wird der Nenner in (444)
$\sqrt{((\cos \varepsilon . \cos \delta)^2 - (\sin \varepsilon . \sin \delta)^2)}$

Wenn man in dem ersten Theile der Grösse unter dem Wurzelzeichen, die Cosinus durch die Sinus ausdruckt, so wird die ganze Grösse unter dem Wurzelzeichen $1 - \sin \varepsilon^2 - \sin \delta^2$

451. Also der zweyte Theil in (444)

$$\frac{h}{\sqrt{(\cos \delta^2 - \sin \varepsilon^2)}}$$

452) Der Nenner hievon läßt sich auch so ausdrucken $\cos \delta . \sqrt{(1 - (\frac{\sin \varepsilon}{\cos \delta})^2)}$

453)

453) So hat Hr. de la L. diese Regel angezeigt Astr. 715 I. A. 1028 II.

454 Sie läßt sich wie er ebenfalls anzeigt noch bequemer so ausdrucken: Man suche einen Winkel

u; dessen Sinus $= \frac{\sin \varepsilon}{\cos \delta}$

So ist die Verbesserung $\frac{h}{\cos \delta . \cos u}$

455. So scheint es freylich als werde die Verbesserung etwas kürzer berechnet als 448;

Wenn man aber bedenkt, daß es nichts hilft die Verbesserung allein zu berechnen, ohne das Ding das verbessert werden soll, nähmlich den halben Tagebogen, so erhellt daß man bey dieser Formel, doch noch T suchen muß; und wenn man einmahl T weiß, so wird das Verfahren 448 eben so kurz seyn als gegenwärtiges.

Verbesserung des halben Tagebogens, nur wegen der Refraction allein.

456. Da die Parallaxe der Sonne, nur wenig Secunden beträgt, so kann man sie in Vergleichung mit der Horizontalrefraction weglassen.

Die letztere setzt de la Lande Astr. 1016. II. A. $33\frac{1}{2}''$

Also wird in (446) $h = -2010''$

Bekanntermassen sieht man wegen der Refraction die Sonne im Morgenhorizonte wenn sie wirklich noch unter ihm ist.

457. Wegen der Refraction allein, ist also in (444) $t > T$;

Parallaxe und Refraction zusammen, geben $t < T$, wenn die Parallaxe grösser ist als die Refraction, wie beym Monde (448)

Exempel zu 454; 456;

458. Für die Polhöhe 51° 32′ sey die Abweichung der Sonne 20 Gr nordl. so findet sich

$T = 117° 15' 58''$

Nun $10 + \log \sin \varepsilon = 19,8937452$

$\log \cos \delta = 9,9729858$

$\log \sin u = 9,9207594$

giebt $u = 56° 25' +$

$\log \cos u = 9,7428423 - 10$

$\log \cos \delta = 9,9729858 - 10$

$0,7158281 - 1$

von $\log h = 3,3031961$

$3,5873680$

gehört zu 3866″,9 oder 1° 4′ 37″

addirt zu $T = 117\ 15\ 58$

$t = 118\ 20\ 35$

459. Hr. d. l. L. giebt Astr. 1028 II. A. eine vom Hr. l'Emery berechnete Tafel wieviel wegen der Refraction der halbe Tagebogen, unter unterschiedenen Polhöhen, u. für unterschiedene Abweichungen vergrössert wird.

Sie ist nach der Formel 454 berechnet, aber die Verbesserung ist nicht in Bogen, sondern gleich in

Zeit

Zeit angegeben, zu welcher Absicht Hr. d. l. L. die Formel mit 15 dividirt.

Es ist wohl bequemer sich der Tafel zu bedienen, dadurch man Bogen des Aequators in Sternzeit verwandelt.

Nach dieser Tafel, beträgt die (458) gefundene Verbesserung, 4 M 18 S 28 T; und fällt wie gehörig zwischen 4 M 6 S u. 4 M 22 S welche Verbesserungen in angezeigter Tafel zu der gebrauchten Abweichung, und den Polhöhen 51 Gr. u. 52 Gr. gehören.

460 Um die kleinen Unrichtigkeiten zu vermeiden die bey solchen, nur der Wahrheit nahen Formeln, vorkommen können, hat Hr. Guerin, durch die gewöhnliche sphärische Trigonometrie die Unterschiede zwischen den halben Tagebogen des Monds u. der Sonne, für Paris berechnet, welche Tafel sich in der Conn. d. T. 1771; 156 S. findet.

Ergänzung des Azimuth für eine geringe Höhe.

461. Die Morgenweite die in (17) gefunden worden, heisse w; so ist $\sin w = \frac{\sin \delta}{\cos \varepsilon}$

462 Wenn man sich durch den wahren Morgen 1. Fig. einen Verticalkreis vorstellt so macht derselbe mit Z V einen Winkel der des Azimuth Ergänzung ist.

Dieses Winkels Sinus ist col α (9; II)

463. Für eine geringe Höhe h; wo cos h = 1; heisse dieser Winkel b; so ist

$$\sin b = \sin w - \text{tang } \varepsilon . h$$

auch $\cos b = \cos w + \text{tang } \varepsilon . \text{tang } w . h$

464 Dieß giebt vermöge einer Rechnung wie (444)

$$b = w - \frac{\text{tang } \varepsilon . h}{\cos w}$$

465. Wenn man also für einen Weltkörper die Morgenweite ohne Betrachtung der Refraction und Parallaxe berechnet hat, und nun den Unterschied dieser beyden Grössen, wie (446) statt h setzt, so hat man die in dieser Betrachtung nöthige Verbesserung der Morgenweite.

Und eben so wegen der Refraction allein nach (456) 465. Was in h multiplicirt ist (464) läßt sich so ausdrucken:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon . \sqrt{(1 - (\frac{\sin \delta}{\cos \varepsilon})^2)}}$$

Der Nenner hievon, wird die Quadratwurzel aus $\cos \varepsilon^2 - \sin \delta^2$ oder aus $\cos \delta^2 - \sin \varepsilon^2$ also ist er $\cos \delta . \cos u$ (454). So giebt die Formel Hr. d. l. L. Astr. 1042. II. A. aus dem Berliner astronomischen Calender 1750 wie vorige (453)

Gebrauch der Morgenweiten die Abweichung des Compasses zu finden.

466. Man setze in der 17 Fig. seyen die Linien alle im Horizonte. CM gehe genau nach Norden, CB nach einem Sterne den man aufgehen sieht.

CA

C A sey der Theil der Magnetnadel eines Compasses der von ihrem Mittel nach Norden geht.

Man wird auf dem Compasse den Winkel BCA bestimmen können.

Kann man also aus der Breite des Ortes, und des Sterns Abweichung, des letztern Morgenweite berechnen so weiß man den Winkel B C M;

Und folglich den Winkel A C M den die Nadel, mit der Mittagslinie macht, oder die Abweichung der Nadel.

Zur Richtigkeit des Verfahrens dient die Verbesserung wegen der Refraction (259) zu brauchen.

Hiezu ist ein freyer Horizont nöthig, daher dieses auf der See brauchbar ist.

467 Zu dieser Absicht hat Hr. Lietaud, in 1707 u. f. J. der Conn. d. T. Tafeln der Morgenweiten der Sonne eingerückt; auch Hr. du Dreneuc 1735 eine weitläuftigere Tafel mit Betrachtung der Refraction berechnet die sich bis 1759 in der C. d. T. befindet u. vom Hr. d. l. L. seit 1768 wieder ist eingerückt worden.

Von dem Positionswinkel.

468. Der **Positionswinkel** (angulus positionis) heißt der Winkel, den der Breitenkreis mit dem Abweichungskreise macht.

In der 11. Taf. 7. Fig der zweyten Abhandlung, der Winkel E S P (II. Abh. 3. Cap) 7 f. 11. c.

469. Die Benennung dieses Winkels läßt sich daraus herleiten, weil er durch die Stellnng eines

Sterns gegen Aequator und Ekliptik zugleich gegeben ist, und selbst die Stellungen der vornehmsten Kreise bestimmt, die einander im Sterne schneiden.

470. Man sieht leicht, daß er sich aus dem Dreyecke E S P auf unterschiedene Arten bestimmen läßt. Die vorzüglichste wird wohl die seyn, wo von den Grössen die zu seiner Bestimmung angenommen werden, soviel als möglich, unveränderlich sind. Weil man nun so wohl die Breite eines Fixsternes als die Schiefe der Ekliptik, wenigstens die letztere für einige Zeit, als unveränderlich ansehen darf, so giebt sich in dem erwähnten Dreyecke die Proportion
$\sin E S : \sin S P E = \sin E P : \sin E S P$

471. Die Breite H S, heisse β; die Schiefe der Ekliptik $= E P = \theta = 23^\circ\ 28'\ 20''$ die Rectascension $A H = \gamma$; der Winkel $E S P = \varphi$;
Weil $E P S = 90^\circ + \gamma$, so ist $\sin EPS = \cos \gamma$;

$$\text{und } \sin \varphi = \frac{\cos \gamma . \sin \theta}{\cos \beta}$$

$$\text{Auch } \cos \varphi = \frac{\cos \theta - \sin \beta . \sin \delta}{\cos \beta . \cos \delta}$$

472. Weil der Sinus des Positionswinkels, bejaht oder verneint ist, nach dem es der Cosinus der Rectascension ist, so ist der Positionswinkel, bejaht im ersten und vierten Quadranten der Rectascension, verneint im zweyten u. dritten.

Wenn man sich die Figuren für den 2; 3; 4. Quadranten entwirft sieht man leicht was dieses heißt, nähm-

nähmlich daß sich des Winkels EPS dessen Sinus = col γ; Lage gegen EPCD ändert.

Damit hängt auch zusammen, daß sin φ am Ende des ersten und dritten Quadranten = o wird, und also im zweyten u. vierten ins Entgegengesetzte übergeht.

Ueber die Veränderungen der Rectascension und Declination wegen des Vorrückens der Nachtgleichen.

473. Man nimmt hiebey an, die Schiefe der Ekliptik, bleibe unveränderlich, so wohl als die Breite eines Fixsternes.

Das Vorrücken der Nachtgleichen, kann man als ein Wachsthum der Länge des Sterns ansehen.

Dieß alles aus Astr. 125. V.120.

472. In der II. Abh. III. Capit. 2 §. III. differentiire man die erste Formel, welche die Abweichung giebt so bekömmt man

$$\text{col}\,\delta.\,d\delta = \text{sin}\,\theta.\,\text{col}\,\beta.\,\text{col}\,\lambda.\,d\lambda$$

also, aus angeführten Capitels 1 §. IIII. (das dortige α ist hier γ) Anf.

$$d\delta = \text{sin}\,\theta.\,\text{col}\,\gamma.\,d\lambda$$

Oder, das Wachsthum der Länge, mit dem Producte aus dem Sinus der Schiefe der Ekliptik, in den Cosinus der Rectascension multiplicirt, giebt das Wachsthum der Abweichung

473 Für die Veränderung der Rectascension findet sich eine bequeme Formel folgendergestalt. 7 f. 11. c.

Im Dreyecke EPS, bleiben die Seiten EP, ES, ungeändert. Man sucht die Verhältniß der Ver-

änderungen, des eingeschlossenen Winkels $E = 90° - \lambda$ und eines andern $EPS = 90° + \gamma$
Dieses gehört für die Differentialformeln sphär. Dreyecke, II. Abh. 2. Cap. 60 §. [8.105] Es ist

dorten	B	A	b	c	a	C
hier	$90° + \gamma$	$90° - \lambda$	$90° - \beta$	θ	$90° - \delta$	φ

$$\text{und } -d\lambda = \frac{-\cos\delta}{\cos\varphi . \cos\beta} . d\gamma$$

474 Oder
$$d\gamma = \frac{+\cos\varphi . \cos\beta}{\cos\delta} . d\lambda$$

475. Dieses ist schon zur Rechnung zulänglich;
Aber aus 472 ist $\cos\varphi . \cos\beta = \frac{\cos\theta - \sin\beta \sin\delta}{\cos\delta}$

Des Zählers zweyter Theil ist aus der II. Abh. [3.2.] Cap. 1 §. 111; [7.44] das dortige α heißt hier γ;
$+ \sin\gamma \sin\theta \cos\delta . \sin\delta - \cos\theta . \sin\delta^2$
also
$\cos\varphi . \cos\beta = \cos\theta . \cos\delta + \sin\gamma \sin\theta . \sin\delta$
476; Daher
$d\gamma = (\cos\theta + \sin\gamma . \sin\theta . \tang\delta) . d\lambda$

Veränderung des Positionwinkels.

477. Im Dreyecke EPS, bleiben noch die beyden Seiten wie (473) und man sucht die Verhältniß der Veränderungen von E und S;
Es dient also, eben die Formel die (473) ist gebraucht worden, folgendergestalt

dorten	B	A	b	c	a	C
hier	φ	$90° - \lambda$	θ	$90° - \beta$	$90° - \delta$	$90° + \gamma$

Der

Der dortige col C ist hier — sin γ also

$$-d\lambda = \frac{-\operatorname{col}\delta}{-\sin\gamma.\sin\theta}. \; d\varphi \text{ und}$$

478) I) $$d\varphi = \frac{-\sin\gamma.\sin\theta}{\operatorname{col}\delta}. d\lambda$$

II) Völlig eben den Werth, giebt sin φ in (471) differentiirt und aus (474) der Werth von $d\gamma$ gesetzt.

III) Weil die Aenderung der Länge allemahl bejaht ist, so ist $d\varphi$ verneint, in den beyden ersten Quadranten der Rectascension, bejaht im dritten u. vierten.

IIII; Nun ist nach (472) φ
Im ersten Quadranten bejaht hat (III) ein verneintes Differential, nimmt ab.

Im zweyten verneint mit einem verneinten Differentiale, wächst.

Im dritten, verneint, mit einem bejahten Differentiale, nimmt ab

Im vierten bejaht mit einem bejahten Differentiale, wächst.

V. Also nimmt der Positionswinkel im ersten und dritten Quadranten ab, im zweyten und vierten zu.

VI. In Hr. d. l. L. Astr. 725 l. finden sich die Positionswinkel einiger Sterne;

Eine Tafel aber, welche sie für viel Sterne auf das Jahr 1750; nebst ihrer Aenderung in 10 Jahren enthält, steht in der II. Ausg. 1046; Auch eine andere in der Conn. des nouv. cel. 1766. p. 100.

Ferner über die Veränderung der Rectascension (476)

479) Sie besteht aus zween Theilen,

Einer $\cos\beta . d\lambda = M$ ist für alle Sterne einerley wofern die Veränderung der Länge in gleicher Zeit für alle einerley ist, und also wenn sich gleich die Sterne auf die man diese Rechnung anwendet, ändern, **unveränderlich**

Der andere, welcher sich nach Rectascension und Declination richtet, also **veränderlich** heissen kann, ist M. tang δ sin γ. tang θ

Anwendung dieser Formeln.

480. Das Vorrücken der Nachtgleichen setzt Hr. de la Lande Astr. 2161 I; 2701; II; $50'' \frac{1}{3}$; das beträgt in 10 Jahren $503'',33. = 8' 23'',33.$ Hr. d. l. L. setzt 23″,36 Astr. 2166 I; 2708 II;

481. Dieser Bogen um den die Längen in 10 Jahren wachsen, ist noch klein genug, für eine gerade Linie, und ein Differential der Länge angenommen zu werden. Man kann also die andern Aenderungen für 10 Jahr daraus berechnen.

Aus diesen Aenderuugen in zehn Jahren, berechnet man also sicher die kleinern Aenderungen in kürzerer Zeit, nach der Verhältniß der Zeit, aber nicht die grössern in längerer Zeit.

482. Also für den unveränderlichen Theil (479)

log 503, 6

log 503,6 $=2,7020857$ Vid. Herbst. S. 477.
log cof $23^\circ\,28^{\prime}\,20^{\prime\prime}=9,9624893-10$

log M $=2,6645750$
giebt $M=461^{\prime\prime},92=7^{\prime}\,41^{\prime\prime},92$
Hr. d. l. L. 2166 I; 2478 II. giebt $M=7^{\prime}\,4^{\prime\prime},4$
wovon ich den Grund nicht einsehe, wenn Er auch gleich die Schiefe der Ekliptik $23^\circ\,30^{\prime}$ braucht.

Exempel

483. Für den Regulus ist im Anfange des Jahres 1770; (conn. des Tems 1772)

Abweichung	13°	$5^{\prime}$	$9^{\prime\prime}$
Rectascens.	149	1	34
von	179	59	60
Rest	30°	58	26

Statt dieses Bogens, brauche ich aus Gellibrands Tafeln $30^\circ\,58^{\prime}\,12^{\prime\prime}$ weil diese Aenderung den Erfolg der Rechnung nicht merklich ändert.

484. Für die Aenderung der Abweichung in 10 Jahren; nach (472)

log sin $23^\circ\,28^{\prime}\,20^{\prime\prime}=9,6002151-10$
log cof $30\;\;58\;\;12=9,9332021-10$
log 503, 6 $=2,7020857$ (482)

$2,2355029$

gehört zu 171, 99 und ist verneint, weil die Rectascension über 90° beträgt.

Also nimmt die Abweichung in zehn Jahren um so viel Secunden ab, oder ihre Veränderung in einem Jahre ist $-17^{\prime\prime},199$

485.

485. Für die Aenderung der Rectascension in zehn Jahren (479)

log M = 2, 6645750 (482)
log tang 13° 5' 9'' = 9, 3663665 — 10
log sin 30 58 26 = 9, 7115008 — 10
log tang 23 28 20 = 9, 6377258 — 10

1, 3801681

gehört zu 23, 997
dazu addirt 461, 92

Aenderung in 10 ☽ = 485'' ,92
in 1 ☽ = 48, 592

486. In der Conn d. T. 1772 steht für ein Jahr die Aenderung der Abweichung — 17''
Rectasc + 49
In des P. Hell Eph 1772; ist jene — 17, 1 diese + 48, 6; die deutschen Rechnungen scheinen schärfer geführt, als die französischen.

Erinnerung wegen der bejahten und verneinten Grössen die hie vorkommen können.

487. Wenn Sinus u. Cosinus der Rectascension verneint sind, entscheidet sich daraus, ob sie über 90; 180; 270; Gr. beträgt.

Südliche Abweichung wird als verneint angesehn, also auch ihr Sinus, aber nicht ihr Cosinus.

Weil die Länge stets wächst so ist dλ allemahl bejaht;

Ist dδ bejaht so zeigt es, Wachsthum nordlicher Abweichung, Abnahme südlicher, an,

Und so umgekehrt wenn es verneint ist.

Vor-

Vorstellung des Vorrückens der Nachtgleichen im Zusammenhange mit der Himmelskugel.

488. In nächstvorgehenden Rechnungen, habe ich statt daß die Aequinoctialpuncte rückwärts gehen, nur daran gedacht daß hiedurch jedes Sterns Länge wächst. Dieses ist für jeden Stern einzeln, zu rechnen, zulänglich. Was aber aus dem Vorrücken für Folgen im Verhalten der Sterne überhaupt gegen einander, und gegen den Weltpol entstehen, verdient einige Erläuterung.

489. A C 18 Fig. sey der erste Quadrant der Ekliptik, E ihr nordlicher Pol, den ich unbeweglich annehme, das heißt ich nehme an, die Ebene in welcher die Erde um die Sonne geht bleibe immer dieselbe, und die Fixsterne ändern ihre Lage gegen diese Ebene nicht. So behält jeder Pol der Ekliptik seine Lage gegen die Fixsterne auch ungeändert. 18 f.

490. A D sey des Aequators erster Quadrant, also C D die Schiefe der Ekliptik, und wenn man E P derselben gleich nimmt ist P der nordliche Weltpol, für die Zeit, da Aequator u. Ekliptik die angezeigte Lage haben.

491. In der folgenden Zeit, rücke des Aequators Durchschnitt mit der Ekliptik, auf ihr, aus A in a gegen die Ordnung der Zeichen, um den Bogen A a $= \psi$. Aber noch mache der nunmehrige erste Quadrant des Aequators, der von a nach der Gegend E D zugeht, gegen Süden eben den Winkel

mit

mit der Ekliptik, den AD mit AC machte, weil ich die Schiefe der Ekliptik als unveränderlich annehme.

492. Nimmt man also ac = 90 Grad und Ecd eben so groß, so ist von einem größten Kreise durch a und d, der Bogen ad, eben der erste Quadrant des Aequators in der neuen Lage, und dc = DC

493. Nimmt man nun dp = 90°, oder welches eben das ist, Ep der Schiefe der Ekliptik gleich, so befindet sich der Weltpol nun in p; und hat gegen die Ordnung der Zeichen den Bogen Pp beschrieben, dessen geometrischer Pol E ist. Dieser Bogen ist dem Bogen Cc ähnlich. Wenn also die Schiefe der Ekliptik = EP wie 471 genannt wird, so ist Pp = ψ. sin θ

494. S sey ein Fixstern, auch unbeweglich (489) so ist sein Breitenkreis ℓPSL unbeweglich. Zu der Zeit, für welche 489; 490, gehören, macht mit diesem Breitenkreise, des Weltpols seiner EPC, einen gewissen Winkel SEP

Dieser Winkel hat sich zu der Zeit (491) in SEp verwandelt und also um pEP = ψ abgenommen.

495. Die Veränderungen die hieraus für die Grössen entstehn durch welche man die Lage des Sterns bestimmt, lassen sich also folgendergestalt übersehn.

496. Es ist zur

	Rectascens.	Abweich	Positionsw.
ersten Zeit	90°—SPC	90°—PS	ESP
zweyten Zeit	— Spc	—pS	ESp

Wie

Wieviel Zeit erfodert wird damit das Vorrücken eine gegebene Grösse beträgt.

497. Dieß ist leicht aus (480) zu finden. Wenn man für das Vorrücken in 10 Jahren die (482) gebrauchte Grösse annimmt, so ist die Zeit in der es

1 Grad beträgt $\frac{3600}{503,36}$ 10 Jahr.

Dieses findet sich durch die Logarithmen 71, ~~4814~~ $\frac{5194}{}$ Jahr

Wenn man das Jahr 365, 25 Tage setzt, so beträgt es 71 Jahr ~~177, 14625~~ $\frac{189,711}{}$ Tage.

Um eine Minute rücken die Nachtgleichen in 1, 192 Jahre fort.

Und um eine Secunde in 0, 0198 Jahre

Exempel zu 494;

498 Für den Polarstern ist im Anfange 1772 nach P. Hell Epheim.

Länge	85°	22′	38″
Breite	66	4	21 Nordl
Rectasc	11	34	15, 4
Abweichung	88	5	15, 8 Nordl
also SEC =	4	37	28, 2

499. Wenn ich also ESL für einen unbeweglichen Quadranten annehme, gegen den sich EPC um E dreht so läßt sich aus (497) berechnen, daß der jezige Winkel SEP; 330, 5414 Jahr erfodert bis auf nichts abzunehmen.

Innerhalb dieser Zeit rückt also der Weltpol in den Breitenkreis ESL; oder in 330½ Jahre wird der Colur der Sonnenwenden durch den Polarstern

Der Weltpol befindet sich allsdenn in k; und wenn sich die Schiefe der Ekliptik nicht ändert ist
Ek = 23° 28' 20''
und aus (498)
ES = 23 55 39
also

kS = 27 19

Dieses ist, unter den angezeigten Voraussetzungen der kleinste Abstand den der Polarstern vom Weltpole, oder eigentlich der Weltpol vom Polarsterne, haben kann. Jezo ist dieser Abstand 1°54'45''

Am weitesten kann der Weltpol vom Polarsterne entfernt seyn, wenn der Winkel SEP = 180° wird, dieser größte Abstand ist SE + EP = 47° 23' 59''

Auch aus (497) folgt daß sich EP um 180 Grad in 12867, 3 Jahren fortdreht.

Nach der Zeit also da EP in ES gekommen wäre, müßte die nur jezt genannte Zahl von Jahren verfliessen oder von jezo an 13197, 8 Jahre, bis der Weltpol seine größte Weite von unserm jezigen Polarsterne (denn allsdenn wäre er es schon lange nicht mehr gewesen) bekäme.

Zweytes Exempel

499. Für α des grossen Bäres ist jezo

Länge	131°	59'	24''
Breite	49	40	5
Rectasc	162	22	7,6
Abweich	62	58	41

Weil sich dieses Sterns Länge im zweyten Quadranten der Ekliptik endigt, so liegt der Colue der Sonnenwenden jezo zwischen diesem Breitenkreise und dem Anfange der Ekliptik;

Beyde machen einen Winkel von 41° 59' 24''
Dieser Winkel wächst, weil sich der Colur der Sonnenwenden gegen die Ordnung der Zeichen dreht.

Wenn man diesen Winkel jezo 42 Grad setzt, so wächst er von jezo an, um 48° und also bis 90° in 3431, 28 Jahren.

Nach soviel Jahren also macht der Colur der Sonnenwenden, einen rechten Winkel mit des Sterns Breitenkreise.

Folglich geht allsdann des Sterns Breitenkreis durch den 180 Grad der Ekliptik, oder den Anfang des ungebildeten Zeichens der Waage.

Dieser Punct der Ekliptik sey b; 19. Fig E S b der Breitenkreis, E p c (die Buchstaben aus 18 F. verstanden) der Colur der Sonnenwenden. 19 f.

So ist wenn man thut als suchte man aus des Dreyecks p E S Seiten, den Winkel E;

$$\text{col } pS = \text{col } Ep \cdot \text{col } ES$$

wo E p die Schiefe der Ekliptik, E S die Ergänzung von des Sterns Breite ist.

Des Sterns Breite aus (499) und die Schiefe der Ekliptik wie in (498) angenommen, finde ich

$$pS = 45^\circ\ 39$$

die Abweichung $= 44\ 21$

Hieraus läßt sich aus (20) beurtheilen welchen Ländern der Stern allsdann ohngefähr vertical werden wird, so wie man weiß, welchen er jezo etwa vertical ist.

Es sind die Polhöhen von Torneo 65° 50' 50''
Bononien 44 29 36

Jezo, geht also der Stern, ohngefähr 3 Gr südwärts vom Scheitel, durch den Meridian von Torneo; In 3421 Jahren wird er zu Bononien beynahe vertical seyn. Allsdann sind

. . . . . populi quos despicit Arctos

die Italiäner. Lucan.

In Voltärs Zueignungsschrift seiner Philol. de Newton, an die Marquise v. Chatelet, stehen einige Verse, welche sich auf dieses Wegrücken des Bärs vom Pole beziehen. Einige Anmerkungen darüber, die das gegenwärtige erläutern können, befinden sich in meiner vermischten Schriften II. Theile. im 28 der prosaischen Aufsätze.

Gebrauch der Rechnungen aus 473. u. f. bey ältern Verzeichnissen der Fixsterne.

500 Wenn man die Stelle eines Fixsternes genau haben will so muß man diese Aenderungen bey den Zahlen seiner Rectascension, Abweichung 2c. die man in einem Verzeichnisse findet machen, um diese Zahlen für die gegebene Zeit einzurichten.

501 Es versteht sich daß man Verzeichnisse die viel Jahr alt wären, dabey nicht sicher brauchen wird; nicht nur weil ihre Beobachtungen nicht ganz zuverlässig seyn möchten, sondern auch weil die Aenderungen viel Jahre über nicht gleichförmig bleiben. (481)

501. Vermittelst dieser Aenderungen giebt der P. Hell das Verzeichniß der Fixsterne für den Anfang jedes Jahres. In der Conn. d. T. aber

wird

wird es nur von Zeit zu Zeit geändert, u. in 1772 finden sich die Stellen der Fixsterne für 1770; die man vermittelst der beygefügten Aenderungen auf die gegebene Zeit bringen muß.

Exempel

502. In den Wiener Ephemeriden vom P. Pilgram; 1770; ist bey dem Polarsterne folgendes angegeben.

Für den Anfang 1770		jährliche Aenderung
Abweichung	88° 4' 36'',4	+ 19'',7
Rectascens	11 31 13 , 6	+ 150 , 9

503 Ich drücke die Veränderung der Rectascension gleich in Secunden aus, und nehme die Zifer die jedesmahl rechter Hand der ganzen Secunden steht für Zehntheile der Secunde an wie mich das berechnete Exempel des Regulus (486) berechtiget. In dem Wiener Calender steht über der Columne dieser Zifern T als ob es Tertien wären aber so wohl das erwähnte Exempel, als der Umstand, daß diese Zifer allemahl nur eine einzige ist, versichern, das T sey ein Druckfehler, dergleichen es im Wiener Calender mehr giebt.

504. Verlangte man nun die Stelle des Polarsterns für den Anfang 1772; so würde man so rechnen.

Wachsthum der Abweichung		
in 2 Jahren		39'',4
zu	88° 4' 36 , 4	
Abw. im Anf. 1772 =	88 5 15 , 8	

Wachsthum der Rectascension in 2 Jahren			5, 1, 8
	zu	11 31	13, 6
Rectasc, im Anf. 1772 =		11 36	15, 4

In den Ephem. für 1772; ist für den Anfang dieses Jahres die Abweichung völlig so wie die hier berechnete; die Rectascension hat die Grade und Secunden auch wie hier, aber 34' welches also ein Druckfehler ist, denn die Zahlen die ich aus 1770 angenommen stimmen auch mit der Conn. d. T. für selbiges Jahr überein.

505. Wollte man die Stelle eines Sternes für einen gewissen Tag des Jahres haben so müßte man die Aenderung vom Anfange des Jahres oder von der Zeit an, für welche man diese Stelle hat, bis auf den gegebenen Tag suchen. Hier ist im Wiener Calender das bequem daß die Tage vom Anfange des Jahres an nach einander fort gezählt sind.

Exempel

506. Man verlangt die Rectascension des Polarsterns für den 1. August 1772; Dieser Tag ist der 213 des Jahres man kann also bis auf ihn 212 verflossene Tage rechnen wenn man die Rectascension gleich für seinen Anfang haben wollte. Weil sie sich aber in einem oder etlichen Tagen nicht merklich ändert so braucht man hier auf die genauste Zahl der Tage nicht zu sehen, und eben deßwegen, darf man das Jahr 365 Tage oder wenn man es zu dieser Absicht übermäßig scharf haben wollte, 365, 25 Tage annehmen.

507. Wer für einen Stern oft solche Berechnungen zu machen hätte, könnte sich einen beständigen Logarithmen dazu berechnen wie ich am Exempel zeigen will.

log 150, 9 = 2,1786892
abgezogen log 365,25 = 2,5625902
beständiger Logarithme = 0,6160990 — 1
addirt zu log 212 = 2,3263359
1,9424349
gehört zu 87, 57

So viel Secunden betrüge das Wachsthum der Rectascension in 212 Tagen

Sie wäre also den 1. August 11° 37' 42'', 97

508. Diese Aenderung der Rectascension liesse sich auch in Zeit ausdrücken und so zu den Absichten brauchen zu denen überhaupt die Rectascensionen in Zeit ausgedruckt gebraucht werden (43; XVII)

Erinnerung, daß die Schiefe der Ekliptik nicht ganz unveränderlich ist.

509. Ich halte für nöthig dieses schon 349; Erwähnte, etwas umständlicher beyzubringen, weil in den nächst vorhergehenden Rechnungen das Gegentheil ist angenommen worden. Uebrigens erfodert meine Absicht nicht, hier davon vollständig zu handeln.

510 Eine periodische geringe Aenderung der Schiefe der Ekliptik, macht das Wanken der Erdaxe (Astr. 293) das ist eigentlich nicht als Abnehmen oder Wachsthum anzusehen, weil von Zeit zu Zeit immer dieselbe Schiefe wieder hergestellt wird.

511. Von einer wirklichen Veränderung redet Astr. 79. Hr. de la Lande hat davon umständlich gehandelt Astr. 2173. 2201 I Ausg. 2715. . 2746 II. A. Er nimmt für unsere Zeit die Verminderung der Schiefe der Ekliptik $1^{\prime}\,28^{\prime\prime}$ in 100 Jahren an. Hr. de la Caille hatte sie nur $44^{\prime\prime}$ gesetzt. Sie rührt von den Wirkungen der Planeten auf die Erde her. Hr. Euler hat zuerst diese Folge aus der anziehenden Kraft, gezeigt, und zu berechnen angewiesen; Mem. de l'Ac. de Prusse; T. X. für 1754; 296. S. Hr. de la Lande hat ebenfalls darüber Berechnungen angestellt Mem. de l'Ac. des Sc. de Par. 1758; p. 252; 339; u. 1761; p. 399.

512. Auserdem daß diese verwickelte Berechnungen allezeit nur Näherungen sind, wo Kleinigkeiten oder was man für Kleinigkeiten annimmt, zu Abkürzung der Rechnung wegbleiben; so sind auch einige der Grössen die darinnen als gegeben angenommen werden, noch nicht mit völliger Sicherheit ausgemacht, z. E. die Masse der Venus; Hr. de la L. hatte sie 1758; so groß als $\frac{2}{5}$ der Masse der Erde gesetzt, und darnach Tafeln berechnet, die in der Conn. d. T. 1761; 114 S. stehn. (man s. seine Astr. 2199. I. Ausg.) aber a. a. O. dieser Ausg. giebt er Formeln, welche die Masse der Venus so groß als die Masse der Erde setzen, wobey er auch in der 2. Ausg. bleibt. Die Masse der Erde, nimmt er, (Astr. II. A. 2746) so an wie Newton sie berechnet hat, ob er gleich eben das. 3405; eine andere Grösse für diese Masse, oder eigentlich für die Verhältniß der Erd-

masse

masse zur Sonnenmasse findet, weil er die gegebenen Grössen zu dieser Rechnung genauer hatte als Newton. Die Rechnung wird wie in höh. Mech. I. Abschn. 241 u. f. geführt.

513 Man wird sich also nicht wundern, wenn sich diejenigen welche diese Berechnungen geführt haben zu Bestätigung ihrer Theorie, immer noch auf die Uebereinstimmung mit Beobachtungen berufen.

Und daher wird es nicht undienlich seyn, daß ich aus Hr. de la L. Astr. a. a. O. hie beybringe, wie die neusten Astronomen, die Schiefe der Ekliptik, nach wirklichen Beobachtungen angegeben haben. Bradleys und des göttingischen Mayers Angaben führe ich aus I. Birds Method of dividing astronomical instruments (man s. vorhin 81. §.) an, wo sie als Proben der Richtigkeit der Werkzeuge (Bird hat das hiesige verfertigt) erwähnt werden, und der Unterschied von 2 Secunden, der jährlichen Abnahme der Schiefe der Ekliptik etwa von $\frac{1}{2}$ Secunde, zugeschrieben wird.

Beobachter; u. Jahre	Schiefe der Ekliptik, über 23° 28′
Bianchini, 1703;	35″
Horrebow, aus Römers Beob. 1709. (Atrium Astron. §. 26)	47
Condamine; 36; 37;	24
Cassini de Thury 43	35
de la Caille 50;	19
Bradley 50; 51;	18
Mayer für den Anf. 56;	16

Die Zeit der Nacht ohngefähr durch Sterne zu finden.

Man beobachtet zweene bekannte Sterne, in einerley Scheitelkreise. Daraus verlangt man die Zeit zu finden.

zof. 514; I. ZPR (20 Fig) sey des Meridians nordlicher Quadrant, ZSK ein ostlicher Scheitelkreis, in ihm die Sterne S, K;

Des Sterns S; Abweichung = b
K = B

Die Stundenwinkel ZPS = t
ZPK = T

so ist T — t = 2 q gegeben, als der Unterschied beyder Rectascensionen.

II. In 152; u. 159 VI; bedeute α das hier beyden Sternen gemeinschaftliche Azimuth SPZ;

Da ist denn k = 90° — α beyden Sternen gemein.

Für S sey sin l = cot ε. tang b. sin k

Für T; sin L = cot ε. tang B. sin k

III. Aus 159; VI; ist k — l = t; k — L = T

also l — L = T — t = 2 q (I)

IIII) Aus (II) sin L = tang B. cot b. sin l = m. sin l wenn ich den Coefficienten kürzer ausdrucke.

V) Also ist die Verhältniß der Sinusse von L und l gegeben, und der Unterschied der Winkel = 2 q (III)

VI) Daher weil sich bekanntermassen, Unterschied und Summe der Sinusse, verhalten, wie die

Tan-

Tangenten des halben Unterschieds und der halben Summe der Winkel,

ist $\text{tang}\frac{1}{2}(l+L) = \frac{1+m}{1-m} \cdot \text{tang}\, q$

VII) Man kann hieraus die Tangenten von l und L besonders suchen; Weil ich aber nicht finde daß dieß mehr Bequemlichkeit giebt so halte ich es für unnöthig, und nehme an daß man aus (VI); (V); diese beyden Winkel weiß

VIII) So ist (159; V) $\sin k = \sin l . \cot b . \text{tang}\, \varepsilon$

VIIII) Und (III) $t = k - l$; $T = k - L$

X) Hieraus findet sich die Zeit nach 43; VIIII u. f.

XI) Wenn $B = o$, so wird in (II) $L = o$; also in (IIII) $m = o$ und in (VI) $l = 2q$ wie auch (III) schon zeigt. Also $\sin k = \sin 2q . \cot b . \text{tang}\, \varepsilon$

XII Wenn beyder Sterne Rectascension einerley ist so ist $q = o$ (I) also $l = L$ (III) Nähme man an, das wären ein paar wirkliche gleiche Grössen so käme $b = B$ (II) Es sollen aber zweene Sterne seyn, nicht einer; Also muß man $l = o = L$ setzen. Da wird auch $k = o$ (VIII) und jedes Sterns Stundenwinkel $= o$ oder $= 180°$ (159; VI) oder beyde sind im Meridiane.

Daß ein paar Sterne die gleiche Rectascensionen haben, in keinen andern Scheitelkreis als in die Mittagsfläche zugleich kommen, hätte sich wohl leicht auf andere Art zeigen lassen. Es war aber gut hie dadurch den Gebrauch der Formeln zu erläutern.

handelt diese Aufgabe ab, und macht auch die zuletzt beygebrachten Erinnerungen.

Exempel

515. Zu Paris beobachtete man den 1. Aug. 1772 den Polarstern, und α des grossen Bäres in einem Scheitelkreise; welche Zeit ist es allsdenn?

Wenn S den Polarstern, T, den andern bedeutet, so ist aus 498; 499; beynahe

b = 88° 5′
B = 62 59
2q = 150 48 = 180° — (29° 12′)
q = 75 24
log tang B = 0,2925219
log cot b = 8,5245860 — 10
log m = 0,8171079 — 2
giebt m = 0, 065630
1 + m = 1, 065630
1 — m = 0, 934369
log tab tang q = 10, 5842248
log 1, 0656 = 0, 0275942
10, 6118190
— log 0, 93437 = — 0, 9705188 + 1
log tab tang ½ (l + L) = 10, 6413002
giebt ½ (l + L) = 77° 8′
aber ½ (l — L) = 75 24
also l = 152 32
L = 1 44

log sin l =

log sin l = 9,6639199
log cot b = 8,5245860
log tang s = 10,0582865

log sin k = 8,2467924

gehört unmittelbar zu 1 Grade und gibt hier

k = 179°
l = 152 32

t = k — l = 26 28
T = 177 16

Die Berechnung der Zeit hieraus, findet sich als ein Exempel 43; XV.

516. So liesse sich die Aufgabe (514) allgemein abhandeln, was auch für ein paar Sterne dazu erwählt würden.

517 Besonders aber pflegt man bey ihr unter S immer den Polarstern zu verstehen, und also die Zeit daraus zu bestimmen, daß man einen andern Stern lothrecht unter ihm beobachtet.

518. Wäre der Polarstern selbst im Pole, so befände sich der andere, bey dieser Stellung allemahl in der Mittagsfläche, und man fände die Zeit aus seiner bekannten Rectascension, nur der Aufgabe (43) ersten Theil umgekehrt.

Weil nun der Polarstern jezo nur wenig vom Pole absteht, so ist der andere Stern in dieser Stellung allemahl nahe beym Meridian. Wenn man also die Rechnung nach ihm führen, oder den Winkel T brauchen will, wie ich t gebraucht habe, so hat man immer nur einen kleinen Winkel in Zeit zu

ver=

verwandeln und zu der Zeit da der Stern durch die Mittagsfläche gegangen ist zu addiren oder davon abzuziehn.

519 Im Exempel (515) ist der Winkel T=ZPK: also RPK = 2° 44′; um diesen hat sich der Stundenkreis des Sterns im grossen Bäre, seit dem Augenblicke da er unter dem Pole in der Mittagsfläche war, gegen Osten gedreht; dieses ist in 10 M 56 S Sternzeit geschehen. Wenn aber der Stern unter dem Pole in der Mittagsfläche war findet sich so: In dem Wiener Calender für 1772; steht seine Rectascension für den Anfang des Jahres in Zeit; sie wächst in einem Jahre um 3, 9 oder fast 4 S; also in den 7 Monaten bis zum Anfange des Augusts um $\frac{4}{7}$ S. Dieses zu der Rectascension im Calender addirt giebt für den 1 August genauer als hie nöthig wäre

Rectasc des Sterns	10 H	49 M	31 S
Nachtgl v. der Sonne am Pariser . . .			
Mittage, aus der C. d. T	15	11	14
Summe	26	0	45

Soviel Zeit nach dem Mittage des 1. Aug. geht der Stern über dem Pole durch die Mittagsfläche.

Das wäre erst den 2 August. Und weil er 24 Sternstunden zuvor auch durchgegangen ist, so darf man nur von der Summe, diese 24 Stunden abziehen, das giebt seinen obern Durchgang

d. 1. Aug.

d. 1. Aug. nachmittage	2 H	0 M	45 S
dazu bis an d. n nächsten untern	12		
und noch		10	56
giebt	14	11	41

Die Zeit (515) nur um eine Secunde von der unterschieden die ich (43 XV) fand.

520. Der Winkel T ist durch die Abweichungen beyder Sterne, und den Unterschied ihrer Rectascensionen gegeben. Wenn man also diese Dinge unveränderlich annimmt so ist der Winkel unveränderlich, also einen Tag des Jahrs so groß als den andern. Und so bleibt seine Ergänzung zu 180 Graden $ZPK = V$ immer einerley also auch die ihr zugehörige Zeit $= \frac{V}{15}$ (soviel Minuten und Secunden Sternzeit, als heraus kommen, wenn man die Zahl der Minuten u. Secunden des Winkels mit 15 dividirt.)

Das heißt: Nach des Sterns untern Durchgange durch die Mittagsfläche, bis an die Zeit da er lothrecht unter den Polarstern zu stehen kömmt, verstreicht einmahl soviel Zeit als das andere; es sey zu welcher Zeit des Jahrs es wolle.

521. Wenn nun Abstand der Nachtgleiche von der Sonne, und Rectascension des Sterns, in Zeit ausgedruckt sind, so ist (43 XVII) die Zeit des obern Durchganges des
Sterns = Abst d Ngl v d S + Rectasc des Sterns

wel-

welche Summe um 24 Stunden vermindert wird, wenn sie darüber beträgt (519)

Zu dieser Zeit addire man 12 St so hat man die Zeit des untern Durchganges,

Und dazu noch $\frac{1}{15}$. V so hat man die Zeit wenn der Stern unter dem Polarsterne steht.

Beträgt die Summe über 24 St. so wird sie um 24 St vermindert.

522. Was man also zum Abstande der Nachtgleiche von der Sonne, welcher allein hier als veränderlich angesehn wird, allemahl, für einen gegebenen Stern addirt; ist Folgendes

Rectascension des Sterns
+ 12 Stunden
+ $\frac{1}{15}$ V.

523. Im Exempel

Rectasc	10 H	49 M	31 S
	12		
$\frac{1}{15}$ V =	10	56	
	23	0	27
für d. 1. Aug.	15	11	14
	14	11	41

524. Weil die Voraussetzung im Anfange (520) nicht ganz richtig ist so bleibt auch das was man addiren soll (522) nicht immer einerley, wäre selbst eigentlich, in einem Monate eines und desselben Jahres, anders als in den andern.

Aber die Veränderungen betragen in etlichen Jahren nicht viel. Sucht man also die Zeit mit

kei=

keiner grossen Schärfe, läßt man sich Unrichtigkeiten von etlichen Minuten gefallen, so kann man für einen gegebenen Stern, Das was man addiren soll (522) einige Jahre lang für unveränderlich annehmen, dergleichen Grösse für mehr Sterne finden, und so sich eine Art von Tafel machen, vermittelst der man bey Nacht ohngefähr finden kann, welche Zeit es ist, wenn man den oder jenen Stern lothrecht unter dem Polarsterne stehn siht.

Das alles wäre nun auch eigentlich auch auf eine gewisse Polhöhe eingeschränkt die in den Rechnungen (514) zu Grunde liegt. Wie man aber Sonnenuhren unter einer Polhöhe braucht für die sie in gröβter Schärfe nicht gemacht sind, so verfährt man auch mit dieser Sternuhr

521. Bey ältern Ausgaben der C. d. T. bis 1760, findet sich ein Kupferstich wo um den Polarstern herum unterschiedene Sterne zu sehen sind, und bey jedem steht was man für ihn zum Abstande der Nachtgleiche von der Sonne addiren muß, die Zeit der Nacht zu finden.

Ein blosses gedrucktes Verzeichniß solcher Sterne vertritt vollkommen die Stelle dieses Kupferstichs, aus dem jemand der die Sterne noch nicht kennt sie doch nicht kennen lernt.

522. Hr. de la L. handelt hievon Astr. 727 I; und noch umständlicher 1047 II. Er bedient sich der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie folgendergestalt:

Im

Im Dreyecke P S K, findet er den Winkel SKP, aus den beyden Seiten P S; SK; und ihrem Winkel.

Darauf im Dreyecke ZPK den Winkel ZPK aus den Seitrn PK; ZP; und dem Winkel ZKP;

Beyder Dreyecke Berechnungen gehören unter die mühsamsten der sphärischen Trigonometrie, zumahl wenn sie nach der gemeinen Art durch Zerlegung jedes Dreyecks in rechtwinklichte bewerkstelligt werden, wozu Hr. d. l. L. in der II. A. die Proportionen hinschreibt. In dieser Absicht sollte ich glauben, wären die Formeln deren ich mich bedient habe bequemer.

Ein Verzeichniß unterschiedner Fixsterne zu der Absicht (521) giebt Hr. de la L. auch in beyden Ausgaben, noch vollständiger in der zweyten.

Folgendes Stück daraus betrifft den Stern des grossen Bäres, für den ich (523) gerechnet habe. Es ist für ihn zu addiren

		Unterschied	
1686	1750	in 10 J	für 5 Gr Polhöhe
22 H 57 M	22 H 59 M 30 S	26 S	— 41 S

Wenn man aus dem angegebenen Unterschiede für 10 J; den für 22 Jahre berechnet, nähmlich 57, 2 S; so findet man das was zu addiren ist, genau wie 523;

Für 5 Grad geringere Polhöhe als die pariser ist, sind 41 S abzuziehen, für 5 Grad grössere zu addiren.

So kann solein ches Verzeichniß, ohngefähr ein Jahrhundert lang, und in ganz Europa gebraucht werden.

523.

523. Wer es gebrauchen will, muß gleichwohl unterschiedene nicht ganz gemeine astronomische Kenntnisse besitzen, in der Art die beyden Fixsterne in einem Verticale zu beobachten geübt seyn, wenn er nur mässige Schärfe in Bestimmung der Zeit verlangt, die Verbesserungen wegen der Unterschiede der Jahre u. der Polhöhe, berechnen, und nach allem diesem, erfährt er die Zeit, kaum so genau, als eine nicht ganz schlechte Taschenuhr sie ihm angäbe.

Die Stunde der Nacht, ohngefähr aus dem Stande der Sterne um den Pol zu sagen, wissen viel Landleute, wenigstens jeder für seinen Ort; auch Sancho Pansa wußte es (Don Quixote I. Th. 3. B. 20 C.) Es kömmt mir nicht vor, als ob gegenwärtiges Verfahren, in der Verhältniß mehr practischen Nutzen hätte, als die Kunst des Landmanns, in welcher es mehr astronomische Zurüstungen erfodert.

Ein anderes, meiner Einsicht nach noch weniger nützliches Verfahren, wird unten angezeigt (733)

Wer so viel astronomische Kenntnisse besitzt, als zu dem beschriebenen Verfahren gehören, der kann ohnstreitig auch eine Mittagslinie ziehen. Und auf der, findet man vermittelst der Fadenfläche (76) die Zeit viel bequemer und richtiger, aus Durchgängen der Sterne durch die Mittagsfläche.

524 In der Nacht da der Mond voll ist, zeigt er bekanntermassen auf einer Sonnenuhr die Stunden der Nacht so an, wie die Sonne die Stunden

des Tages, aus dem Grunde, weil er da der Sonne entgegengesetzt ist.

Giebt man also bey Nachte auf einen Stern acht welcher der Sonne entgegengesetzt ist, so kann man auch vermittelst desselben, die Stunden der Nacht auf einer Sonnenuhr wahrnehmen, wenn man sich nur etwas erdenkt das dem Schatten gleichgültig ist.

Ein solches Mittel bey Nacht die Stunde vermittelst der Sterne zu finden, hat ein Jesuit u. Prof. zu Ingolstadt, P. Aigenler gewiesen. Man s. die Welperische Gnomonik III. Th. 11. C.

525. Auf den alten Astrolabien, Quadranten u. d. g. sind auch Sterne bezeichnet vermittelst deren man die Nachtstunde finden kaun.

Sebastian Münster; in s. Rudimentis Mathematicis cap. 55. sequ. hat ein paar Sternuhren angegeben, die sich auf die tägliche Bewegung gründen, man findet sie in der Welperischen Gnomonik a. a. O. beschrieben.

526 Von (514) an, bis hieher ward die Polhöhe als bekannt angenommen. Wenn man sie nun nicht wüßte, so liesse sich folgende Aufgabe abfassen:

An einem Orte, wo man die Polhöhe nicht weiß, beobachtet man zweene bekannte Sterne in einem Scheitelkreise, ohne ihre Höhen zu wissen. Darauf beobachtet man eben so, einen dieser beyden, mit einem dritten auch bekannten, in einem Scheitelkreise. Man weiß die Zeit die zwischen beyden Beobachtungen verfloß. Daraus soll man die Zeit jeder Beobachtung, und die Polhöhe finden.

Die Methode dieses zu bewerkstelligen wäre nachstehende.

Der drey Sterne Abweichungen heissen b; B, β;

Bey der ersten Beobachtung heisse des ersten Stundenwinkel x; des zweyten x + g; wo g der bekannte Unterschied zwischen beyder Rectascensionen ist.

So giebt das gemeinschaftliche Azimuth nach 150; die Gleichung

$$\frac{\text{tang b} - \text{tang } \varepsilon . \text{ cos x}}{\text{sin x}} = \frac{\text{tang B} - \text{tang } \varepsilon \text{ cos (x+g)}}{\text{sin (x + g)}}$$

Wenn man aus dieser Gleichung x fände, so hätte man die Aufgabe (514) aufgelöset, aber das wäre hie nicht brauchbar, weil die Polhöhe unbekannt ist.

Man hat nun aber auch den ersten Stern und den dritten in einem Scheitelkreise beobachtet.

Weil man die Zwischenzeit weiß so weiß man die

Grösse k, um welche sich des ersten Stundenwinkel diese Zeit über verändert hat.

Ich will annehmen er sey beydemahl auf der Ostseite, so ist sein Stundenwinkel nun x — k;

Und weil man auch weiß, um wieviel des dritten Sterns Rectascension von des ersten seiner unterschieden ist, so ist bey dieser zweyten Beobachtung, des dritten Sterns Stundenwinkel x + γ, wo γ eine gegebene Grösse ist.

Also giebt nun das gemeinschaftliche Azimuth folgende Gleichung

$$\frac{\text{tang}b - \text{tang}\varepsilon \cos(x-k)}{\sin(x-k)} = \frac{\text{tang}\beta - \text{tang}\varepsilon \cos(x+\gamma)}{\sin(x+\gamma)}$$

Es ist klar daß sich aus diesen beyden Gleichungen, die beyden unbekannte Grössen x; ε; finden lassen.

Der Hr. v. Maupertuis Astr. Naut. Pr. 19 hat diese Aufgabe aufgelöst.

Er erklärt sie für sehr nützlich zu Lande und zu Wasser, weil nichts leichter und sicherer sey, als zweene Sterne zugleich in einem Scheitelkreise zu beobachten.

Dieses Leichte und Sichere kann ich nach meiner wenigen Erfahrung eben nicht finden, zumahl wenn die Sterne nicht nahe beysammen sind und sehr nahe beysammen dürfen sie vermuthlich nicht seyn. Da gehört deucht mich ziemlich viel Aufmerksamkeit dazu, genau zu bemerken, wenn ein paar Dinge die sich beyde bewegen, zugleich hinter einen lothrechten Faden kommen.

Ge-

Gesetzt aber, diese Bemerkung wäre so leicht und sicher:

Soviel ich von dem Wanken der Schiffe gehört und gelesen habe, möchte mit Scheitelkreisen auf einem Schiffe wohl nicht viel anzufangen seyn.

Also bliebe der Gebrauch dieser Aufgabe übrig, wenn ich etwa durch Schiffbruch auf eine wüste Insel geworfen wäre.

Eine mässig gute Taschenuhr müßte ich doch gerettet haben, nebst einem Verzeichnisse der Fixsterne und trigonometrischen Tafeln

Ich müßte auch Zeit haben meine Uhr zu prüfen ob sie nicht gar zu sehr in Unordnung gerathen ist.

In diesen Umständen würde ich wohl die Polhöhe bequemer und sicherer finden können, als durch ein Verfahren, das viel Zeit u. Aufmerksamkeit, selbst Proben die mißrathen können, wenn die Sterne nicht zugleich in einen Scheitelkreis kommen, erfodert und was ich wissen will, nicht unmittelbar, sondern erst gegebene Grössen darstellt daraus ich das Gesuchte mühsam berechnen soll.

Ueber das Dreyeck dessen Seiten, Länge, Abweichung, und Rectascension, der Sonne sind.

528. Weil die Theile dieses Dreyecks, häufig müssen betrachtet, und mit einander verglichen werden, so ist es dienlich ihre Vergleichungen zusammen zu übersehen. Diese Theile sind aber folgende. 13 F. 13 f.

Länge EF = λ
Abweichung FG = δ
Rectascension EG = γ;
Schiefe der Ekliptik E = θ;
F = Φ

529 Am häufigsten kommen die ersten vier vor, zwischen ihnen lassen sich vier Combinationen machen, denen aus der II. Abh. 2 u. 3 §. folgende Gleichungen zugehören.

530; I; sin δ = sin θ. sin λ (das. F u. I Gleich.)
II; cot λ = cot γ. cos θ (E und V Gl)
III; tang δ = tang θ. sin γ (D u. II. Gl)
IIII; cos λ = cos γ. cos δ (A u. III. Gl)

531. Wenn F im Meridiane ist so ist EFG der Winkel der Ekliptik mit der Mittagsfläche, und für ihn geben sich mit den übrigen vier Dingen folgende Combinationen, die ich mit den vorigen fortzählen will. Ich nenne EFG = Φ

532; V; cot Φ = cos λ tang θ (B; VI)
VI; sin γ = sin λ. sin Φ (F; I)
VII; tang δ = tang λ. cos Φ (E; VIII)
VIII; tang γ = tang Φ. sin δ (D; II)
VIIII; cos Φ = cos γ. sin θ (C; IIII)
X; cos θ = cos δ. sin Φ (Eben so)

533. I Man kann aus den Gleichungen 530; 532; noch andere wenn man sie nöthig hat herleiten, alle hieher zu setzen wäre zu weitläuftig. Nur eine Probe davon zu geben; Wenn man der Rectascension Sinus und Cosinus verlangte, so wäre aus

530;

530; II; $\text{col}\,\gamma = \frac{\cot\lambda}{\text{col}\,\theta}.\,\text{sin}\,\gamma$

Das giebt; $\sqrt{(\cot\lambda^2 + \text{col}\theta^2)} = m$ gesetzt

$$\text{sin}\,\gamma = \frac{\text{col}\,\theta}{m}$$

$$\text{col}\,\gamma = \frac{\cot\lambda}{m}$$

II Wenn die Länge über 180 Gr. wird, so darf man statt E nur die Herbstnachtgleiche annehmen, da allsdenn F in Absicht auf G gegen den Südpol zu liegt.

Man kann aber auch die vorigen Formeln so brauchen. Es sey

$\lambda = 180° + \mu$ so ist $\text{col}\,\lambda = -\text{col}\,\mu$; $\text{sin}\,\lambda = -\text{sin}\,\mu$; $\text{tang}\,\lambda = +\text{tang}\,\mu$; Also aus

530; I; $\text{sin}\,\delta = -\text{sin}\,\theta\,\text{sin}\,\mu$

weil die Abweichung verneint ist

Aus 530; II; $\text{tang}\,\gamma = \text{col}\,\theta.\,\text{tang}\,\mu$. u. s. w.

534. Weil man jezo die mittlere Schiefe der Ekliptik $23° 28' 20''$ annimmt, so wird es nicht undienlich seyn, ihr zugehörige Logarithmen herzusetzen, wie ich sie aus Gellibrands Tafeln durch Proportionaltheile berechnet. Sie sind für

den Sinus = 9, 600215117 31666
Cosinus = 9, 962489284 71723
die Tangente = 9, 637725832 59943

$\sin 2\theta = 9,8637343$
$\cos 2\theta = 9,8342346677077$
$\sin \frac{1}{2}\theta = 9,3083603$
$(\sin \frac{1}{2}\theta)^2 = 18,6167206$
$\frac{1}{2} \sin 2\theta = 9,5627043221 33$

Warum ich die jetzige mittlere Schiefe genannt habe, wird man aus 509; 510; verstehen.

Verhältnisse kleiner Aenderungen im Dreyecke EFG.

535. Die Aenderungen der Länge und Abweichung sind 297; verglichen.

536. Länge und Rectascension Weil hier die Winkel G, E, bleiben, so ist in II. Abh. 2. Cap. 67.

dorten	B	A	a	c	C	b
hier	θ	G	λ	γ	φ	δ

$$\text{und } d\gamma = \frac{\sin\gamma \; d\lambda}{\cos\delta \sin\lambda}$$

537. Rectascension u. Abweichung; Aus (297; 536;) zusammen kömmt

$$d\gamma = \frac{\sin\gamma \; d\delta}{\cos\lambda . \sin\delta} = \frac{\cot\theta . \; d\delta}{\cos\lambda . \cos\delta}$$

Das letzte aus (530; II)

538; Des Winkels F Veränderung $d\varphi$ bekömmt folgende Ausdrückungen, durch die Veränderungen der drey Seiten:

Durch

Durch die Veränderung der Länge tang δ sin φ d λ

Abweich tang λ. sin φ d δ

Rectasc. sin δ. d γ

Die erste u. zweyte Ausdrückung aus II. Abh. 2. Cap. 71. wo für die erste

	B	A	C	a	b	c
hie	θ	G	φ	λ	δ	γ

Die zweyte eben so, nur λ; δ, verwechselt.

Die dritte eben so aus a. O. 69;

539 Weil sich auch die Schiefe der Ekliptik ein wenig ändert, so kann man fragen, wieviel dadurch bey ungeänderter Länge, z. E. Rectascension u. Abweichung geändert werden, die für eine gegebene Schiefe berechnet sind.

So ist in II. Abh. 2. Cap. $A = 90° \; a = \lambda$ und für die Abweichung

	A	a	C	c
34 hier	90°	λ	θ	δ

$$d\delta = \text{tang } \delta \cot \theta . \; d\theta =$$

540. Für die Rectascension, a. a. O. 51; sind B; c; hier θ; γ; also

$$d\gamma = \frac{-\cot \varphi . \sin \gamma}{\text{col } \delta} . \; d\theta$$

Man drücke cot φ aus 532; V aus, ferner col λ aus 530 IIII; so kömmt

$$d\gamma = \tfrac{1}{2} \text{tang } \theta \sin 2\gamma . - d\theta$$

Wenn man hier sin γ aus 530; II; ausdruckt so bekömmt man auch

$$d\gamma = \sin \theta . \text{col } \gamma^2 . \text{ tang } \lambda . - d\theta$$

541; Für den Winkel F; a. a. O. 48; sind B; C; hie θ; φ; also $d\varphi = \frac{-\cos\gamma}{\cos\delta} . d\theta$

Reduction der Ekliptik auf den Aequator.

542. Diese Aufschrift führt unter den astronomischen Tafeln eine, welche den Unterschied zwischen Rectascension und Länge enthält. Sie wird nach den Längen geordnet und zeigt also wie viel man von der Länge, die das Argument ist, abziehen, oder dazu addiren muß, die Rectascension zu haben.

De la Caille Tabulae Solares (Par. 1758; 4;) Tab. XI. in des P. Hells Ausgabe Tab. 14;

543. Aus 530; II; ist $\text{tang}\,\gamma = \cos\theta . \text{tang}\,\lambda$

544. Die Tangente des Unterschiedes findet sich

$$\text{tang}\,(\lambda - \gamma) = \frac{(1 - \cos\theta) . \text{tang}\,\lambda}{1 + \cos\theta . \text{tang}\,\lambda^2}$$

$$= \frac{2 . \sin\frac{1}{2}\theta^2 . \text{tang}\,\lambda}{1 + \cos\theta . \text{tang}\,\lambda^2}$$

$$= \frac{2 . \sin\frac{1}{2}\theta^2}{\cot\lambda + \cos\theta . \text{tang}\,\lambda}$$

Es giebt Fälle, wo man nach einer dieser Formeln, selbst mit Bequemlichkeit rechnet, z. E. nach der zweyten wenn die Länge eine kleine Tangente hat.

Auser dem aber sind sie auch nützlich Folgerungen aus ihnen herzuleiten. Man s. unten 549.

Exempel

545. Die Schiefe der Ekliptik sey 23° 28′ 20″; die

die Länge 5 Zeichen 10 Grad = 160°; so ist
tang λ = — tang 20°
log tang 20° = 9,5610658
log cos 23°28'20'' = 9,9624893
log tang γ = 9,5235551
Den spitzigen Bogen, dem dieser Logarithme zugehört finde ich aus Gellibrands Tafeln, und durch Proportionaltheile 18° 27' 42'' also ist

γ = 161 32 18
γ — λ = 1 32 18
beym Hr. de la C. 1 32 17,8

Wenn Länge, und wenn Rectascension grösser ist?

546. I Wenn m einen Bogen unter 90° bedeutet, so kann die Länge vier durch diesen Bogen gegebene Werthe haben, die ich mit ihren Tangenten herschreibe

I	II	III	IIII
λ = m	180° — m	180° + m	360° — m
tang λ = tang m	— tang m	+ tang m	— tang m

II Ist cos θ. tang m = tang p; so hat γ folgende vier Werthe die in eben der Ordnung jenen vier Werthen der Länge zugehören

p; 180° — p; 180° + p; 360° — p

III Hiebey merke ich gleich, Nachstehendes an, das in der Folge brauchbar ist:

Dieser vier Rectascensionen, doppelte sind

2p; 360° — 2p; 360° + 2p; 2. 360° — 2p

Die

Die Sinusse dieser vier doppelten Rectascensionen, sind, der ersten und dritten ihrer + sin 2p; der zweyten und vierten ihrer — sin 2p; wie man sich leicht unterrichtet wenn man sich die Sinus in eine Figur wie die erste meiner Anfangsgr. der Trigonometrie zeichnet, oder auch die Werthe dieser Sinusse aus den Formeln für die Sinusse der Summen u. Differenzen sucht.

547) Auch haben die vier Werthe der Länge, (546) der Grösse nach, einerley tang $(\lambda - \gamma)$ (544) aber diese Tangente des Unterschiedes ist im I. u. III. Quadranten bejaht, im II u. IIII verneint.

Oder in jenen beyden, ist die Länge am größten, in diesen beyden die Rectascension.

548 I Man berechne also die Unterschiede zwischen Länge und Rectascension, durch den ersten Quadranten, so lassen sich diese Unterschiede, mit den Längen die ihnen zugehören, dergestalt in eine Tafel ordnen, daß bey jedem Unterschiede vier Längen stehn, und nur angezeigt werden muß, zu welchen Längen der Unterschied zu addiren, von welchen er abzuziehen ist.

II Hieraus wird jemand der des la C. Tafel vor sich hat, derselben Einrichtung verstehen.

III Ein Exempel zur Erläuterung wird doch nicht überflüssig seyn

IIII Man drückt bekanntermassen die Längen durch Zeichen, Grade u. s. w. aus.

V So erhellt aus 546; 547; Folgendes, wenn man sich erinnert daß die Zahlen einer solchen Ta-

fel anzeigen sollen, wieviel man von der gegebenen Länge abziehen oder zu ihr addiren muß, die Rectascension zu erhalten.

Die 545 berechneten $1^{\circ}\,32^{'}\,18^{''}$ gehören zu

$\circ\,\mathfrak{Z}\,20^{\circ}$ abgezogen

5 10 addirt

6 20 abgez.

11 10 addirt.

VI Das Paar Zeichen, dessen Zahlen gerade sind, hat einerley Grade u. s. w.

Das Paar, dessen Zahlen ungerade sind, nicht mit den vorigen einerley, aber unter sich einerley.

Bey jenem Paare wird abgezogen, bey diesem addirt.

Wenn also $\circ$ u VI in einer Columne der Tafel zu oberst neben einander geschrieben werden so wachsen ihre Grade von oben herunter.

Zu unterst dieser Columne schreibe man V; XI; auch neben einander. Dieser Zeichen Grade wachsen von unten hinauf.

VII So läßt sich der berechnete Unterschied zwischen Länge u. Rectascension so stellen, daß er zugleich den vier Längen gegenübersteht, für die er der Grösse nach einerley ist.

VIII Diese berechneten **Unterschiede** also, sind **Glieder** der Tafel; jedes solche Glied, von einer Länge abgezogen, oder dazu addirt giebt die Rectascension welche der Länge gehört.

Also wird es im I; III; Quadranten abgezogen, im II; IIII; addirt (547)

§49. Den größten Unterschied zu finden. (544) Denn daß der Unterschied bis auf nichts abnehmen kann, und es also keinen kleinsten giebt ist offenbahr.

Der Unterschied wird am größten, wenn in der dortigen dritten Formel der Nenner am kleinsten wird.

Des Nenners Differential ist

$(\text{col}\,\theta.\,\text{sin}\,\lambda^2 - \text{col}\,\lambda^2).\,d\lambda$; das $= o$ gesetzt

giebt $\text{tang}\,\lambda = \frac{1}{\sqrt{\text{col}\,\theta}}$.

Des Divisors Logar. = 4, 98124464 — 5

abgezogen von 10

10, 01875535

Dieser Logarithme gehört der Tangente von 46° 14′ 12″; also findet sich nach §47; der größte Unterschied bey 1 Zeichen 16° 14′ 12″

4 13 45 48

7 16 14 12

10 13 45 48

Des größten Unterschiedes Tangente wird $\frac{\text{sin}\,\frac{1}{2}\,\theta^2}{\sqrt{\text{col}\,\theta}}$

Nun ist die Hälfte der Schiefe = 11° 44′ 10″

Davon der Logarithme des Sinus

9, 30833603 — 10

verdoppelt 18, 61667206 — 20

abgezogen 4, 98124460 — 5

0, 63547600 — 2

Hiezu 10 addirt giebt der gesuchten Tangente Logarithmen in den trigonometrischen Tafeln.

Daraus

Daraus findet sich der größte Unterschied
$2^{o}\ 28^{1}\ 24^{11},9$

In des la Caille Tafel, findet sich ein Unterschied, nur um 0, 1 einer Secunde geringer, zweymahl nach einander, bey Längen zwischen welche die vorhin angezeigten fallen, denn des l. C. Tafeln gehen von 10 zu 10 Minuten.

Verbesserung, wegen einer andern Schiefe der Ekliptik

550. Diese wird nun aus (540) erhellen.

Man berechne nähmlich, was in — d θ multiplicirt werden soll für die Rectascensionen von 0 bis 90°, eben dieser Factor, nur mit gehöriger Beobachtung der Zeichen, gilt für die grössern Rectascensionen (547)

In diesem Factor, kann man etwas als unveränderlich ansehen, nähmlich die Hälfte der Tangente der Schiefe der Ekliptik welche man für eine mittlere annimmt z. E. $23^{o}\ 28^{1}\ 20^{11}$.

Hat man diesen Factor berechnet so muß man ihn in die Veränderung der Schiefe, die man jedesmahl annimmt, multipliciren.

Exempel.

551. In dem 545 berechneten Exempel, setze ich nun $\gamma = 18^{o}\ 27^{1}\ 42^{11}$, davon das doppelte $= 36\ 54\ 24$

log 0, 5 =

log 0, 5 = 0, 6989700 — 1
log tang 23° 28' 20'' = 9, 6377258 — 10

beständiger Logarithme = 0, 3366958 — 1
log sin 36° 54' 24'' = 9, 7785228 — 10

= 0, 1152184 — 1
gehört zu 0, 13038

Beym la C. ist dieser Factor 0, 130 angegeben.

552. Der beständige Logarithme bleibt für alle Receascensionen, so lange man eben die mittlere Schiefe der Ekliptik annimmt.

553. Da sich übrigens ein Product nicht sehr ändert, wenn sich jeder Factor nur ein wenig ändert, so hat man nicht nöthig, die Logarithmen für die Schiefe der Ekliptik und die doppelte Rectascension, in der Schärfe zu suchen wie ich gethan habe; man kann sich begnügen die Logarithmen für die Bogen zu brauchen, die ihnen in Minuten am nächsten kommen.

554. Der Sinus der doppelten Rectascension ist im ersten und dritten Quadranten bejaht, im zweyten und vierten verneint, (546) darnach richtet es sich eben so, ob der bisher betrachtete Factor, bejaht oder verneint ist.

555. Man berechne ihn also für die Längen durch den ersten Quadranten, nähmlich, für jede Länge ihre Rectascension, wie man so thun muß, und daraus den Factor.

Für diese Längen ist er bejaht.

556. Die Werthe des Factors die so herauskommen,

= 2, 0801

men,

men, lassen sich in eine Tafel ordnen, daß jeder Werth vier Längen gegen übersteht.

Beym la C. in der Pariser Ausgabe (542) pag. 21 Tabella correctionis cet. in des P. Hells Ausgabe ist sie die 20.

557. Weil jeder solcher Werth nach (546; I I) im I; III; Quadranten bejaht, im II; IIII; verneint ist, so giebt er mit der Veränderung der Schiefe der Ekliptik multiplicirt (540)

Wenn der Winkel der Ekliptik mit dem Aequator

wächst

Abnahme der Rectasc. im I; III Qu.
Wachsthum II; IIII.

Wenn er abnimmt

Wachsthum I III
Abnahme II IIII

558. Man sehe nun jeden solchen Werth, als bejaht an, ohne an die Veränderung bey Längen über 90 Gr. zu denken, und eben so sein Product in die Veränderung des Winkels (557), sie mag Wachsthum oder Abnahme seyn.

559 In der Tafel (548) findet sich allemahl ein Glied das zu eben der Länge gehört, zu welcher der erwähnte Werth gehört

Wenn man also dieses Glied, so ändern will, wie die Veränderung des Winkels erfodert, muß man das Product (558) zu ihm addiren oder davon abziehn?

560. Beantwortung dieser Frage für wachsenden Winkel

I) Da nimmt die Rectascension im I; III; Qu. ab (557)

Soviel sie abnimmt, so vielmehr als das Glied der Tafel, (548) muß von der Länge abgezogen werden, um die Rectascension zu erhalten.

Das erwähnte Glied, wird selbst abgezogen weil die Rectascension kleiner ist als die Länge (547)

Also werden folgende beyde Stücke von der Länge abgezogen:

Das Glied der Tafel (548)

Das Producˊct (558) welches hier die Abnahme der Rectascension anzeigt.

Man addirt also das Product zum Gliede, so hat man zusammen was abgezogen werden soll.

II) Im II; IIII; Qu. wächst die Rectascension. Das Glied der Tafel (547) wird für diese Quadranten zur Länge addirt; und nun wegen der wachsenden Rectascension, auch noch das Producˊct (559) welches hier anzeigt um wieviel die R. wegen des wachsenden Winkels wächst.

III. Wenn also der Winkel wächst so wird das Product (558) allemahl zum Gliede (547) addirt.

561. **Beantwortung wenn der Winkel abnimmt.**

Da wächst die Rectasc. im I; III; Qu. nimmt im II; IIII; ab;

Das Glied der Tafel aber, wird, wie vorhin im I; III; abgezogen, im II; IIII; addirt.

Also wird wenn der Winkel abnimmt im I; III;

Qu.

Qu. nicht so viel abgezogen als das Glied der Tafel beträgt, im II; IIII; nicht soviel addirt.

Man muß also hie das Glied der Tafel um das Product vermindern; oder,

Wenn der Winkel abnimmt, zieht man das Product allemahl vom Gliede ab.

562. **Exempel** Wenn man den (551) gefundenen Factor mit 20 Secunden multiplicirt, so bekömmt man 2,60760 Secunden. Weil die niedrigsten Zifern hievon, weder nöthig noch zuverläßig sind, so brauche man nur die beyden höchsten, bey des d. l. C. (545) angeführten Zahl; Sie geben

addirt 1° 32′ 20″, 4
abgezogen 1 32 15 , 2

Diese beyden Grössen, sind also statt der (545) zu brauchen; Für die Schiefe der Ekliptik

23° 28′ 40″ die erste
23 28 zweyte.

563 Die bisher vorgetragene Regeln finden sich beym de la C. ohne Beweis. Es hat mir also der Mühe werth geschienen die Gründe von ihnen aus einander zu setzen.

Wieviel die Rectascension eines Sterns der Breite hat, von der Rectascension des Punctes der Ekliptik unterschieden ist, der mit dem Sterne einerley Länge hat.

564. In der II. Abh. III. C. 2 §. III wo Rectascension aus Länge u. Breite gefunden wird, heis-

se des Sterns Rectascension ζ; des Puncts der Ekliptik seine wie hie (528) so ist aus a. O. derselben Abhandlung, und hier (543)

$$\text{tang}\,\zeta = \text{tang}\,\gamma - \frac{\text{sin}\,\theta.\,\text{tang}\,\beta}{\text{cos}\,\lambda}$$

565. Was von der Tangente der Rectascension des Puncts der Ekliptik abgezogen wird, nenne man der Kürze wegen u; So ist

$$\text{tang}\,(\gamma - \zeta) = \frac{u}{\text{sec}\,\gamma^2 - u.\,\text{tang}\,\gamma}$$

Der Nenner hievon ist $\frac{1 - \frac{1}{2}\,u.\,\text{sin}\,2\gamma}{\text{cos}\,\gamma^2}$;

$$566.\ \text{Also tang}\,(\gamma - \zeta) = \frac{u.\,\text{cos}\,\gamma^2}{1 - \frac{1}{2}\,u.\,\text{sin}\,2\gamma}$$

567 Man kann dieses so ausdrucken

$$\text{tang}\,(\gamma - \zeta) = \frac{\text{sin}\,\theta\ \text{cos}\,\gamma^2}{\text{cos}\,\lambda.\ \text{cot}\,\beta - \frac{1}{2}\,\text{sin}\,\theta.\,\text{sin}\,2\gamma}$$

Wenn aber die Breite klein ist so daß man sie wohl selbst statt ihrer Tangente setzen dürfte, so ist dieser Ausdruck, der ihre grosse Cotangente enthält, nicht so bequem, die Rechnung für einzelne Exempel zu führen, ob er wohl sonst seinen Gebrauch haben kann.

568 Wenn man hie die Rectascension nach 533 wegschafft, und alles durch die Länge ausdruckt so bekömmt man $\text{tang}\,(\gamma - \zeta) =$

$$\frac{\text{sin}\,\theta\ \text{tang}\,\beta}{\text{cos}\,\lambda + \text{cos}\,\theta^2.\,\text{sin}\,\lambda.\,\text{tang}\,\lambda - \frac{1}{2}\,\text{sin}\,2\theta\ \text{tang}\,\beta.\,\text{tang}\,\lambda}$$

569.

569. Für eine geringe Breite, wird beyder Rectascensionen Unterschied auch klein seyn. Da kann man ihn selbst statt der gefundenen Tangente setzen. Ich will ihn allsdenn f nennen.

Breite, und Schiefe der Ekliptik, bleiben ungeändert; Man fraat für welche Länge, beyder Rectascensionen Unterschied am größten wird?

570. Daß es keinen bejahten kleinsten Unterschied geben kann, erhellt daraus weil für die Länge $= 90°$ der Unterschied verschwindet. Das zeigt die Formel (568) so wie die Betrachtung der Sache selbst. Ein Stern dessen Länge ein Quadrant ist befindet sich im Colur der Sonnenwenden; für ihn fallen Breitenkreis und Abweichungskreis zusammen.

571. Für den größten Unterschied muß der Nenner (568) ein kleinstes seyn.

Sein Differential, sogleich mit der Länge Differentiale dividirt ist:

$$-\sin\lambda + \operatorname{col}\theta^2 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}\lambda . \operatorname{col}\lambda \\ +\sin\lambda : \operatorname{col}\lambda^2 \end{array} \right\}$$

$$-\tfrac{1}{2} . \frac{\sin 2\theta . \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{col}\lambda^2}$$

Dieses $= 0$ gesetzt, den Cosinus der Länge daraus weggeschafft, und gehörig geordnet, giebt

$$\sin\theta^2 . \sin\lambda^3 + (2\operatorname{col}\theta^2 - 1) . \sin\lambda = \tfrac{1}{2}\sin 2\theta . \operatorname{tang}\beta$$

oder $\sin\lambda^3 + \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta^2} . \sin\lambda = \cot\theta . \operatorname{tang}\beta$

572. Auch $\sin\lambda + \frac{\sin\theta^2}{\cos 2\theta} \sin\lambda^3 = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta . \operatorname{tang}\beta$

573. Man nenne den Coefficienten beym Würfel des Sinus, a; die bekannte Grösse rechter Hand, b;

Wenn die Breite nicht groß ist so ist b ein kleiner Bruch und man findet nach (Analysis endlicher Grössen 694) $\sin\lambda = b . (1 - ab^2 + 3ab^4 . . .)$

$= b\,q$

574. Dieses ist ein Werth des gesuchten Sinus. Die beyden andern zu bekommen dividire man

$a . \sin\lambda^3 + \sin\lambda - b$ mit $\sin\lambda - b . q$

Man bekömmt zum Quotienten

$a . \sin\lambda^2 + a . b . q . \sin\lambda + 1 + a . b^2 q^2$

und der Rest ist $bq + a . b^3 q^3 - b$

Dieser Rest ist vermöge (573) $= 0$; wie sich gehört.

575. Der Quotient $= 0$ gesetzt und wie eine quadratische Gleichung aufgelöset giebt

$$\sin\lambda = -\frac{1}{2}bq \pm \sqrt{(-\frac{3}{4}bbqq - \frac{1}{a})}$$

Diese beyden Werthe sind also unmöglich, und es giebt für die Frage (569) nur den Sinus (573)

Die Gleichung unter der Gestalt die sie am Ende von 571 hat, zeigt schon daß sie zwo unmögliche Wurzeln hat weil der Coefficient der ersten Potenz bejaht ist. (An. Un. 185.)

576 Die Grösse a (573) kömmt nur auf die Schiefe der Ekliptik an. Ich finde ihren Logarithmen

9, 366195768 — 10

Sie selbst = 0, 23238

Exempel

577. Man setze die Breite = 6°; so ist

0, 3366958 — 1 (551)

log tang β = 9, 0216202 — 10

0, 3583260 — 2

giebt b = 0, 022820

Ferner ist 3 log b + log a = 0, 4411757 — 6

die zugehörige Zahl 0, 000002761 6

abgezogen von 0, 022820

sin λ = 0, 022817

Der zugehörige Bogen ist 1° 18' 27''

578 Dieser Bogen selbst in Decimaltheilen des Halbmessers ist 0, 0228201799, von b wenig unterschieden. Man wird also zur Berechnung des größten Unterschiedes selbst, ohne grossen Irrthum, b statt Bogens, Sinus, oder Tangente brauchen.

579 Weil man doch die Rectascension des Puncts der Ekliptik selbst, haben muß, wenn man durch einen Unterschied, aus ihr, die Rectascension des Punctes der eine Breite hat, sucht so berechne ich zuerst die Rectascension des Punctes der Ekliptik, welche der Länge (577) zugehört.

Ich verrichte solches so, daß ich suche, wieviel sie kleiner ist als ihre Länge, und mich also der zweyten Formel in (544) bediene.

Weil ich die Länge = b setze, so ist 2 log b, (aus 577) der Logarithme des Quadrats der Tangente

der Länge (579) und
$2 \log b + \log \operatorname{col} \theta = 0,6791413 - 4$
Dieses giebt $\operatorname{col} \theta$. tang $\lambda^2 = 0,0004775$

Ich setze also den Nenner erwähnter Formel
$= 1,0005$

Den gesuchten Bogen gleich in Secunden zu finden rechne ich so

$2 \log \sin \frac{1}{2} \theta$	=	0,6167206 — 2 (549)
$\log \operatorname{tang} \lambda$	=	0,3583260 — 2
$- \log 1''$	=	+ 5,3144251
		2,2894717
abgez log 1,0005	=	0,0002171
		2,2892546

gehört zu 194,65

Also $\lambda - \gamma =$ $3' 14'',65$
$\lambda =$ $1° 18' 27''$

$\gamma =$ $1° 15' 12'',34$

wo man mir nicht zutrauen wird daß ich die Hunderttheilchen der Secunde für zuverlässig ansehe. Da sie indessen nicht mehr Mühe machen, können sie wohl mit hergesetzt werden.

580. Ich muß nun $\operatorname{col} \lambda$ berechnen; Ich nehme denselben, weil der Bogen klein ist $= 1 - \frac{1}{2} bb$;
Ich finde $2 \log b = 0,7166520 - 4$
also $bb = 0,0005\,2077$ giebt
$\operatorname{col} \lambda = 0,99973961$
statt dessen nehme ich in der folgenden Rechnung
0,99974

581. Die Formeln 566; 568; erfoderten eine et-

was

was mühsame Rechnung. Ich suche also in der (564) u (565) in Secunden, auf die Art wie ich (579) gerechnet habe; ich finde den Logarithmen dieser Menge von Secunden; 3, 9363734; daher

$$u = 2^\circ\ 23'\ 57''$$
$$\gamma = 1\ 15\ 12 \quad (579)$$
$$\zeta = -(1\ 8\ 45)$$

Nähmlich, weil die Bogen so klein sind, setze ich in (564) γ statt tang γ; und eben so ζ statt tang ζ

582. Das Verneinte zeigt an, der Bogen von $1^\circ\ 8'\ 45''$ erstrecke sich auf dem Aequator vom Anfange des Widders gegen die Ordnung der Zeichen.

Die Rectascension des Sterns also, wie man sie zu rechnen pflegt, wäre 360° um den genannten Bogen vermindert.

583. Zweene Abweichungskreise, der eine durch den Punct der Ekliptik, der andere durch den Stern, machen mit einander den Winkel u

584. Diesem Winkel gehören 9 M 35 S 48 T Sternzeit.

So viel kömmt der Stern eher in den Meridian als der Punct der Ekliptik.

585. Für eine geringere Breite als 6 Grad, ist der Sinus der Länge, wo beyde Rectascensionen (569) am meisten unterschieden sind noch kleiner (573)

Die Sinusse dieser Längen verhalten sich nähmlich beynahe wie die Tangenten der Breiten.

586. Oder, wenn man von den unterschiedenen Bogen die zu einerley Sinus gehören, den klein-

sten nimmt, so verhalten sich die erwähnten Längen, beynahe wie die Breiten selbst.

587. Wenn die Breite nordlich ist so ist der Sinus der Länge (573) bejaht und zu ihm gehören also nur ein Bogen unter 90° und dieses Bogens Ergänzung zu 180°;

Bey diesen beyden Längen, ist der Rectascensionen Unterschied am grösten.

Im Exempel (577) wäre die zweyte Länge $178^\circ\ 41^{I}\ 33^{II}$

588 Für südliche Breite wird der Sinus verneint, und gehört also zu ein paar Längen deren jede über 180° ist

Für 6° südliche Breite, zu

6 Zeichen	$1^\circ\ 18^{I}$	27^{II}
11	$28\ 41^{I}$	33

589. Wenn also der Stern eine solche Länge hat so schneidet sein Breitenkreis, die Ekliptik allemahl nahe bey den Nachtgleichen; desto näher, je geringer die Breite ist. Also befinden sich solche Sterne allemahl unweit des Kolurs der Nachtgleichen.

590. Die Grösse u (565) hier der grösste Unterschied beyder Rectascensionen weil sie klein sind, verhält sich auch beynahe wie die Tangente der Breite.

Er wird z. E. für die Breite 3 Gr. ohngefähr halb so groß seyn als der den man (581) fand

Diese Grösse wird für südliche Breite zu γ addirt, oder des Sterns Rectascension ist da grösser als die Rectascension des Puncts der Ekliptik.

591. Für $\lambda = 0$ ist $u = \sin \vartheta \operatorname{tang} \beta$ (564).

wel-

welches da $= \gamma - \zeta$ ist (590); Also ist daselbst
$\zeta = -\sin\theta \operatorname{tang}\beta$

592. Der Werth von u in (591) kann nicht merklich von dem Werthe unterschieden seyn welcher dem größten Unterschiede zugehört (589)

Für die bisher gebrauchte Breite (577) finde ich ihn $2^\circ 23' 55''$, wie (581) denn auf ein paar Secunden sind wohl überhaupt diese Näherungen nicht ganz zuverlässig.

Wie ein anderer Unterschied für gegebene Länge berechnet wird.

593. Wenn man dergleichen Unterschiede nach einander, für eine gegebene Breite, aber mehrere Längen berechnen will, so ist der Zähler von u; unveränderlich, für den man also einen beständigen Logarithmen berechnen kann.

594 Will man nach der Formel (566) rechnen, so drücke man in derselben Zähler, u in Secunden aus; im Nenner aber in Decimaltheilen des Halbmessers, weil der Nenner, sowohl als was im Zähler in u multiplicirt ist, sich auf den Halbmesser als auf die Einheit beziehen müssen, damit dieser beyden Grössen Quotient, eine ungenannte Zahl wird, die mit der Menge von Secunden welche auf u geht, multiplicirt, angiebt wieviel Secunden auf $\gamma - \zeta$ gehen;

Denn daß man statt tang $(\gamma - \zeta)$ den Bogen selbst nehmen darf, erhellt weil er kleiner als das (581) gefundene u seyn wird.

Weil man nun u durch Logarithmen sucht, so

nenne

nenne ich den ersten log u welcher es in Theilen des Halbmessers giebt. Dazu addire man das Entgegengesetzte des Logarithmen einer Secunde so bekömmt man den zweyten log u; der Menge von Secunden die darauf gehen.

595. Die Rectascension des Puncts der Ekliptik, muß gegeben seyn, sonst wäre es unnütz zu untersuchen, wieviel eine andere von ihr unterschieden ist.

Wenn sie aber wie meist geschehen wird, auser den Minuten noch Secunden enthält, so hat man zu der Rechnung nach (566) nicht nöthig den Cosinus und den Sinus ihres Doppelten aufs genaueste für Secunden zu suchen. Man kann sich mit dem was am nächsten kömmt begnügen.

Exempel

596. Die Breite sey wie (577). Die Länge $= 20^\circ$ so hat man aus (545)

$$\gamma = 18^\circ\ 27^{'}\ 42^{''}$$
$$2\gamma = 36\ \ 55\ \ 24$$

Um ohne Proportionaltheile, doch aus Gellibrands Tafeln, der Wahrheit nahe zu kommen, habe ich über die hier angegebenen Grade und Minuten die Rectascension $36^{''}$, ihr doppeltes $48^{''}$ angenommen.

Die Rechnung sieht allsdenn so aus:

best log

best log (593) = 0,6218353 — 2
log col λ = 9,9729858 — 10

erster log u = 0,6488495 — 2
+5,3144251

zweyter log u = +3,9632746
2 log col γ = 0,9541158 — 1

log des Zählers in (566) = 3,9173904
erster log u = 0,6488495 — 2
log 0,5 = 0,6989700 — 1
log sin2 γ = 9,7787580 — 10

0,1265775 — 2
gehört zu 0,013383
1,

Nenner 0,986616
von log des Zählers = 3,9173904
abg. log d Nenners = 4,9941499 — 5

log (γ — ζ) = 3,9232405
gehört zu 8380; also ist der Unterschied der Rectascensionen 2° 19' 40''

597. Wenn man tang γ selbst, sehr genau hätte und u berechnete so liesse sich durch Proportionaltheile, der Bogen berechnen der tang γ — u zur Tangente hat, der wäre ζ und so hätte man beyde Rectascensionen, also auch ihren Unterschied.

Aber das gewöhnliche Verfahren (543) giebt nicht tang γ selbst, sondern nur ihren Logarithmen. Also ist mit den Proportionaltheilen hie nichts anzufangen, und wenn man nicht wie in (590) rech-

nen

nen will, so wird man wohl ζ aus der gegebenen Breite, durch die gewöhnliche sphärische Trigonometrie suchen müssen, wie an dem (564) angef. Orte auch gewiesen ist.

598. Aus der Rectascension eines Punctes der Ekliptik findet sich wenn er durch die Mittagsfläche geht. Folglich zeigt der nach 593 berechnete Unterschied, wieviel der Stern eher oder später durch die Mittagsfläche geht. Und das, auf eine Secunde Sternzeit zuverlässig, wenn man den Unterschied nur auf 15 Secunden des Bogens zuverlässig weiß.

599. Die Planeten entfernen sich nicht über 6 Grad von der Ekliptik; die Venus ausgenommen, die doch auch nur selten grössere Breite hat.

Für einen Planeten also gelten allemahl die Näherungen 573 u. f.

Wenn man in einem astronomischen Calender des Planeten Länge und Breite berechnet hat und nun auch seinen Durchgang durch die Mittagsfläche beyfügen will, so ist dieses Verfahren dienlich, und nach (598) die Näherung allemahl scharf genug, weil man diese Durchgänge nur beynahe voraus zu wissen verlangt. (412)

Wenn ein Stern nur geringe Breite hat, zu finden um wieviel seine Abweichung von der Abweichung des Puncts der Ekliptik unterschieden ist der mit ihm einerley Länge hat.

600. Des Planeten Abweichung heisse D; des Puncts der Ekliptik seine δ; das Uebrige wie 564 u. f.

So

So ist aus II. Abh. III C. 2. Aufg. III u. VIII; und aus gegenwärtiger; 530;

$$\sin D = \sin \delta . \cos \beta + \cos \theta . \sin \beta$$

$$\cos D = \frac{\cos \gamma \cos \delta . \cos \beta}{\cos \zeta}$$

601.
$$\sin (D - \delta) = (1 - \frac{\cos \gamma}{\cos \zeta}) . \sin \delta . \cos \delta . \cos \beta + \cos \theta . \cos \delta . \sin \beta$$

602. Weil $\zeta = \gamma - f$ (569; so ist $\cos \zeta = \cos \gamma - f . \sin \gamma$ daher

$$1 - \frac{\cos \gamma}{\cos \zeta} = \text{tang } \gamma . f$$

603. Man setzt statt des Sinus der Breite, sie selbst, statt ihres Cosinus 1; denn wenn gleich die Breite z. E. von 6 Graden schon so groß ist daß man ihren Cosinus mit einiger Schärfe zu haben, wenigstens der Reihe die ihn ausdrückt (An. Un. (296) beyde erste Glieder brauchen müßte, so gäbe doch hie das zweyte Glied, mit dem kleinen f multiplicirt etwas ganz Unbeträchtliches.

604. Wie viel dieses was ich Unbeträchtlich nenne höchstens ausmachen kann, bestimme ich so:

Der größte Werth von f für die Breite von 6 Graden ist (581) gefunden worden; das dorrige u;

Ich lasse diesen Werth in Secunden ausgedruckt.

Die Breite drucke ich in Decimaltheilen des Halbmessers aus; der Logarithme dieser Menge von

De-

Decimaltheilen, ist (1. Abh. 98) log 21600 + log e; = 0,0200286 — 1; Sein Doppeltes, addire ich zu dem (581) befindlichen Logarithmen, der Menge von Secunden die auf u gehn. Die Summe gehört zu 94,71; davon ist die Hälfte 47'' ,3 = $\frac{1}{2}$ ßß. f wenn es am größten ist.

Dieses Product wäre noch mit der Tangente der Rectascension zu multipliciren. So lange die Rectascension unter 45° ist, giebt die Multiplication noch was kleiners als ßßf. Und weil f immer abnimmt indem die Rectascension wächst, so bleibt allemahl tang γ. $\frac{1}{2}$ B^2. f unbeträchtlich, zumahl wenn man nicht einzelne Secunden suchen will.

605 Wenn man also nach 603 verfährt und den Unterschied beyder Abweichungen selbst statt seines Sinus setzt so kömmt

$$D - \delta = \cos\theta \cos\delta \beta + \sin\delta . \cos\delta \tan\gamma . f$$

606. Wenn man dieses von der Breite abzieht, so kömmt

$$\beta - (D - \delta) = (1 - \cos\theta . \cos\delta) . \beta - \tfrac{1}{2} \sin 2\delta \tan\gamma . f$$

wo man die Rectascension aus 30; 11; wegschaffen kann.

607. Wenn man diese Grösse, für unterschiedene Längen bey gegebener Breite berechnet hat so ist das folgendergestalt zu brauchen:

Man hat also: **Um wieviel die Breite grösser ist als der Unterschied der Abweichungen.** Dieses zieht man von der Breite ab;

So hat man den Unterschied der Abweichungen. Aber δ wird aus der Länge als gegeben angenommen; **Folglich hat man D.**

608.

608. Die Abweichung eines Planeten braucht man nur beynahe, allenfalls auf ein paar Minuten zu wissen, und mit noch geringerer Schärfe, wenn man nur etwa ein Fernrohr nach dem Planeten richten will, seinen Durchgang durch die Mittagsfläche zu beobachten.

609. Zu dieser Absicht wäre also die Formel (606) ob sie wohl sonst das Gesuchte, besonders bey einer Breite von etlichen Graden, nicht allemahl in Minuten richtig geben wird. Unter die Ursachen hievon gehört, daß ein Bogen von etlichen Graden, schon nicht ohne einen ganz unmerklichen Fehler statt seines Sinus gesetzt wird. Was dieser Fehler betragen kann, läßt sich aus nachfolgender Aufgabe beurtheilen.

Zu finden, wieviel ein kleiner Bogen der in den Tafeln steht, seinen Sinus übertrifft.

610. Von dem Logarithmen des Sinus, wie ihn die Tafeln darstellen, um 10 vermindert, ziehe man den Logarithmen einer Secunde ab; so bekömmt man den Logarithmen der Menge von Secunden, die der Sinus hält.

611. **Exempel** Für 6 Grad ist

log des Sinus = 0,0192346 — 1

+ 5,3144251

4,3336597

gehört zu $21560''$

$6° = 21600$

Unterschied $= 40$

Oder $\sin 6° = 6° - 40''$

612. Auf eine ähnliche Art findet man in Secunden wieviel eines kleinen Bogens Tangente ihn übertrifft.

613. Die Logarithmen sind hie nicht weiter zu brauchen, als bis Sinus oder Tangente, der Länge von 100000 Secunden gleich wird, oder $= 0{,}4848137$; Allsdenn aber ist der zugehörige Bogen, nahe bey 26 Graden, und einen solchen Bogen mit seinem Sinus oder seiner Tangente zu verwechseln fällt niemanden ein.

614. Ich habe aus der Formel (606) noch eine andere hergeleitet, wo Abweichung und Rectascension durch die Länge ausgedruckt sind. Ich setze aber dieselbe nicht her, weil ich weder sie, noch selbst die mitgetheilte, bequemer finde, als die unmittelbare Berechnung nach der Formel (600) wodurch man allezeit die Abweichung in Minuten zuverlässig, und mit Proportionaltheilen, auch ziemlich sicher in Secunden hat:

615. Daß sich der Unterschied der Rectascensionen, bequem ausdrücken läßt (566) veranlaßte mich was ähnliches für die Declination zu suchen. Warum es aber für dieselbe nicht gleich gut angehen kann, erhellt aus (609. Breite und Unterschied der Abweichungen, können jedes etliche

Grad

Grad betragen, viel mehr als der größte Unterschied der Rectascensionen (581)

616 Eustach Manfredis Introductio in Ephemerides (Bonon. 1750; 4) enthält unter den beygefügten Tafeln unterschiedene die zu den bisherigen Untersuchungen gehören. Die 19 heißt: Correctio ascensionis rectae pro punctis Zodiaci latitudinem habentibus, nähmlich der Unterschied der Rectascensionen; (564) die 18; enthält was man von der Breite abziehen muß, den Unterschied der Abweichungen zu finden; (607) Beyde gehen bis auf 9 Grad Breite, aber nicht durch alle einzelne Grade der Länge u. Breite.

Hr. de la Lande theilt diese beyden Tafeln, noch mehr abgekürzt mit, Astr 668 I. 901; II; aber ohne anzuzeigen wie sie berechnet werden; die Untersuchungen die ich von (564) an ganz von neuem angestellt habe, scheinen mir nicht nur der Theorie wegen lehrreich, sondern auch in der Ausübung brauchbar.

Daß in dem Kolure der Nachtgleichen, der Unterschied der Rectascensionen sowohl am größten wird (589) als die (607) berechnete Grösse erwähnt Hr. de la l. auch, aber ohne beyzufügen, daß dieses, wenigstens für den Unterschied der Rectascensionen, nur beynahe wahr ist. Ich weiß also nicht, ob Er, oder die welche es vor ihm gesagt haben, dieses aus einer Theorie hergeleitet haben wie ich (570) gethan habe, und auch Etwas dergleichen bey (606) hätte zeigen können, wenn ich eine Formel, die nur, so

sehr beynahe wahr ist, der Mühe werth geachtet hätte, oder ob man es nur aus der Erfahrung welche eine berechnete Tafel darstellt, geschlossen hat.

Die Rectascension der Sonne durch Beobachtungen zu finden.

617. Wenn man sich hiebey der Mittagshöhe der Sonne (Astr. 95) bedient so ist (530; III)

$$\sin \gamma = \cot \theta \ \text{tang} \ \delta$$

618. Hätte bey der Mittagshöhe um etwas weniges gefehlt, oder nähme man die Polhöhe, und folglich die Höhe des Aequators ein wenig unrichtig an; so fände man auch die Abweichung etwas unrichtig; und daher die Rectascension.

619. Wieviel ein geringer Fehler der Abweichung, die Rectascension unrichtig macht lehret (537)

Wenn man die letzte der dortigen beyden Ausdrückungen gebraucht wo nur der Nenner veränderlich ist so erhellt, daß in den Nachtgleichen, dieser Nenner am grösten wird.

620 Wenn man also die Abweichung um m Secunden unrichtig annimmt, so bekömmt man die Rectascension zum wenigsten um m. cot δ Secunden unrichtig, und auser den Nachtgleichen noch um viel mehr.

621 Um $23^{\circ}\,28^{1}$ herum, sind die Totangenten mehr als 2,3; Wenn man also bey der Abweichung um 10 Secunden fehlt so fehlt man bey der Rectascension wenigstens um 23;

622. Nahe bey den Sonnenwenden, geben klei-

ne

ne Fehler bey der Abweichung ungeheuer grosse für die Rectascension, wie man leicht findet, wenn man zu den Logarithmen der Cosinusse, von einer Länge die fast 90° ist und der ihr zugehörigen Abweichung; den Log. der Tangente der Schiefe der Ekliptik addirt und diese Summe von 0 abzieht.

So findet sich für die Länge 80° oder wenn die Sonne im 20 Grade der Zwillinge ist der Fehler der Rectascension etwa 57,4 mahl so groß als der Fehler der Abweichung; 574^{11} wenn die Abweichung um 10^{11} unrichtig wäre.

633. Dieses rührt wie man leicht sieht daher, weil die Abweichung noch nicht um 23 $\frac{1}{2}$ Grad wächst indem die Länge um 90 Gr. wächst und kleine Bogen der Ekliptik um die Sonnenwenden herum, des Aequators zugehörigen Bogen, fast parallel liegen.

624. Also ist das Verfahren (617) ohne weitere Vorschriften, in einer beträchtlichen Entfernung von den Nachtgleichen ganz unsicher.

625. In der nordlichen Hälfte der Ekliptik, kommen zwo Längen vor, die gleiche Abweichung, und entgegengesetzte, sonst gleiche Cosinus haben.

Die Formel (537) zeigt, daß einerley Fehler der Abweichung, auch die Rectascension um gleichviel unrichtig macht, nur einmahl zu klein, das andere mahl zu groß.

Eben so verhält es sich auch in der südlichen Hälfte der Ekliptik.

626. Wenn man also die Sonne in einer Hälfte der Ekliptik, zweymahl mit gleichen Abweichun-

gen beobachtet, und jedes mahl aus der Abweichung die Rectascension berechnet, so bekömmt man diese zwar je esmahl unrichtig, wofern man die Abweichung nicht richtig hat, aber, wenn der Fehler bey der einen Abweichung nur so groß als bey der andern, nnd auf eben die Art begangen ist (nicht einmahl zu wenig als das anderemahl zu viel,) so betragen die beyden unrichtigen Rectascensionen, zusammen so viel, als die beyden richtigen die man statt ihrer haben sollte.

Nähmlich ein Paar wie das andere den halben Kreis.

627. Bey gleichen Abweichungen, ist die Sonne gleichweit vom Kolure der Sonnenwenden, oder ihre beyden Abweichungskreise machen mit dem Kolure gleich grosse Winkel auf entgegengesetzten Seiten des Kolurs. Jeder solche Winkel hat zum Maasse den halben Unterschied beyder Rectascensionen, welche den gleichen Abweichungen zugehören.

628 Dieses veranlaßt folgendes Verfahren:

Man wähle einen Fixstern, in dessen Parallele sich die Sonne befindet, also mit ihm gleiche Mittagshöhe hat.

629. Aus der Zeit wie lange er nach der Sonne durch den Meridian geht, giebt sich der Unterschied seiner Rectascension von der Rectascension der Sonne (43) wenn man gleich keine beyder Rectascensionen selbst weiß.

630. Ich nenne des Sterns Rectascension γ,

der

der Sonnen ihre ζ; wenn auch keine von beyden bekannt ist so weiß man doch $\gamma - \zeta = \varphi$.

631. Eine solche Beobachtung mit dem Sterne sey zwischen der Frühlingsnachtgleiche und der nächsten Sonnenwende angestellt.

632. Nach ihr wächst der Sonne Abweichung, bis zur größten, nimmt wieder ab, und erreicht endlich wiederum die welche der Stern hat, oder die welche sie (631) hatte.

Wenn dieses geschiht, stelle man eben so eine zweyte Beobachtung an. Für sie gelten die ähnlichen lateinischen Buchstaben (630)

Denn des Sterns Rectascension ist auch nicht ganz unveränderlich.

633. So ist also

I. Rectasc. der Sonne $= \zeta = \gamma - \varphi$

II. $= z = g - f$

II — I $= \varphi - f + g - \gamma$

634. Oder wenn $360^\circ - \varphi = \varrho$; $360^\circ - f = r$;

II Rect — I Rect $= r - \varrho + g - \gamma$

Nähmlich φ gehört der Zeit wie lange der Stern nach dem Mittage durch den Meridian ging; ϱ der, wie lange er vor eben demselben Mittage durchging.

635. Also aus (6$\frac{2}{7}$7)

Abstand der Sonne vom Kolure der Nachtgleichen

$= \frac{1}{2}(\varphi - f) + \frac{1}{2}(g - \gamma)$

$= \frac{1}{2}(r - \varrho) + \frac{1}{2}(g - \gamma)$

636. Dieses von 90° abgezogen giebt die erste Rectascension, oder zum Quadranten addirt, die zweyte.

637. Wie man zu diesen Beobachtungen Mittagshöhen nöthig hat, so ist nicht zu erwarten, daß die Mittagshöhen der Sonne beydemahl in größter Schärfe gleich seyn sollten. Da muß man sich ohngefähr so verhalten, wie (Astr. 120) ist gewiesen worden.

Exempel

638. Aus de la Caille Lect. Elem Astron. 330 §. der lat. Uebers. (Wien 1757.)

Zu Paris verglich man auf diese Art 1749; die Sonne, mit dem hellen Sterne der Leyer. Es war

	den	Mitth. d. ⊙					
12 April	49°	58′	33″	ϱ =	103°	50′	54″
30 August	50.	3	8	♑ =	241	43	26
Unterschied		4	35				

639. Man sucht nun, wieviel die Rectascension, welche die Sonne am Mittage des 12 Aprils hatte, von der unterschieden ist, die sie hatte als ihre Abweichung genau so groß war, als den Mittag des 30 August.

Hiezu sind die Veränderungen der Rectascension u. Abweichung von 12 bis 13 April nöthig. Sie liessen sich durch Beobachtungen finden (82) D. l. C. aber nimmt sie aus den astronomischen Tafeln so an: Wachsthum

der Rectasc = 55′ 10″,4 = 3310″,4

Abw. = 21 45 ,4 = 1305 ,4

Wenn nun die Höhe des Aequators zu Paris, y heißt so ist

y +

y + Abw Mittags d 12 April
= y + Abw Mitt d 20 Aug — (4' 35'')

Also, diesen Unterschied auf Secunden gebracht
Abw Mitt 12 April + 275'' = Abw Mitt 20 Aug.

Man sucht also wieviel die Rectascension vom Mittage des 12 Aprils wachsen muß daß die Abweichung um 275' wächst.

Dieses giebt das letzte Glied folgender Proportion

1305, 4: 275 = 3310, 4: 697, 38

Es sind aber 697'', 38 = 11' 37''

640 Die Rectascensionen des Sterns und der Sonne, für den 12 April weiß man ohngefähr, auch ohne diese Beobachtung.

Wenn man sie in so weit als bekannt annimmt, so zeigt sich daß der kleinste Bogen des Aequators welcher zwischen den Enden beyder Rectascensionen enthalten war und (638) ϱ heißt, sich vom Sterne, durch die Frühlingsnachtgleiche bis an die Sonne erstreckt;

Dieser Bogen wächst also, wenn der Sonne Rectascension wächst, des Sterns seine ungeändert bleibt.

Und er wächst also um das am Ende (639) gefundene Stück, vom Mittage des 12 Aprils bis an den Augenblick, da die Abweichung der Sonne so groß war, als den Mittag des 30 Aug.

641. Weil man nun den Abstand der Sonne vom Sterne verlangt, wo die Sonne gleiche Abweichungen hat so muß man, statt des für den Mittag des 12 April gefundenen Bogens, ihn um die Grösse die man am Ende (639) fand vermehrt gebrauchen.

Also ist nach dieser Verbesserung

$$\varrho = 104^\circ\ 2^{\prime}\ 31^{\prime\prime}$$
$$\mathfrak{r} = 241\ 43\ 26$$

$\mathfrak{r} - \varrho =$	137	40°	55	
$\mathfrak{g} - \gamma =$			18	
Summe	137	41	13	
halbirt	68	50	36,5	Abst d. ☉ vom Kolur der Nachtgl.
	21	9	23,5	Rectasc der ☉ d. 20 Apr.
	158	50	36,5	Rect. d. ☉ d. 30 Aug

642. Die Rectasc d. Sonne d. 20 April, versteht sich für den Augenblick da ihre Abweichung so groß war als des Mittag des 20 Aug. Am Mittage des 20 Apr. war die Rectasc. um $11^{\prime}\ 37^{\prime\prime}$ kleiner.

643. Die Grösse $\mathfrak{g} - \gamma$ rührt meistens von dem Vorrücken der Nachtgleichen her, nächst dem aber von der Abirrung des Lichts (Astr. 221;) und dem Wanken der Erdaxe (Astr. 293) welches sich hie nicht zulänglich erklären läßt.

644 Was von dem Vorrücken der Nachtgleichen herrührt, wird 11 Secunden betragen, wie sich aus der jährlichen Veränderung der Rectascension der Leyer berechnen läßt. Wie man dergleichen Veränderung findet, lehret (479)

Für

Für des Sterns Rectascension.

644 Von	ς =	104°	2′ 31″
abgezogen		21 .	9 23, 5
läßt		82	53 7, 5
abgez. von		359	59 60
läßt		277	6 52, 5

Des Sterns Rectascension den 12. April.

645. Es ist offenbahr, daß eigentlich Nichts darauf ankömmt, ob die Sonne beyde mahl im Parallele des Sterns ist, sondern Alles nur darauf, daß sie beydemahl gleiche Abweichungen hat.

Ein Stern in dessen Parallele sie ist, giebt nur einige Bequemlichkeit mehr, die Mittagshöhen zu nehmen.

Also könnte man auch einen Stern wählen, von dessen Parallele die Sonne beyde mahl gleichviel abstünde.

646. Die Zeiten wenn Sonne u. wenn Stern im Meridiane waren, geben sich entweder aus den wirklich beobachteten Durchgängen durch die Mittagsfläche, oder aus übereinstimmenden Höhen.

647. Hr. de la Caille scheint das letzte Verfahren vorzuziehen, und man kann dafür anführen, daß sich in einem Tage oder in einer Nacht unterschiedene Paare übereinstimmender Höhen nehmen lassen; deren jedes die Zeit des Durchganges durch die Mittagsfläche giebt. Also hat man diese Zeit aus einer Menge von Beobachtungen, durch ein Mittel aus ihnen, wenn sie nicht alle aufs genaueste einerley geben.

648.

648. Ein Quadrant in der Mittagsfläche ist doch der Mittagshöhen wegen nöthig, wäre er nicht aufs genaueste darinnen, so entstünde daraus ein geringerer Fehler in den Mittagshöhen als in den Zeiten der Durchgänge; (91; 140) Wenn man aber sicher ist daß der Quadrant und das Fernrohr in der Mittagsfläche sind, oder den Fehler ihrer Stellungen kennt so ist ohne Zweifel diese Art die Zeiten der Durchgänge unmittelbar zu finden am bequemsten.

649. Bey diesem Verfahren scheint ein Zirkel wenigstens darinnen begangen zu werden daß man die Grösse g — γ nicht hat ohne des Sterns Rectascension schon zu wissen; die man doch nicht anders als aus bekannten Rectascensionen der Sonne herleiten kann. Hierauf antworte ich Folgendes:

Wer sich so verhalten wollte, als wüßte er gar nichts genaues von der Rectascension des Sterns, der dürfte nur anfangs die genannte Grösse als = o ansehen. So bekäme er doch des Sterns Rectascension, mit einem sehr geringen Fehler, weil diese Grösse sehr klein ist.

Aus ihr liesse sich die erwähnte Grösse ohne merklichen Fehler berechnen, und so fände man durch wiederhohlte Beobachtungen die Rectascension so scharf als man verlangte.

650. Da man sich aber in der Astronomie zu nutze machen kann, was die Vorfahren gethan haben, auch wenn sie vielleicht solches durch unbequemere Methoden leisteten als man jezo hat, da man

ihre Angaben zu prüfen, und was in ihnen noch unrichtig ist, zu verbessern weiß, so kann man des Sterns Rectascension, so wie sie zu den Berechnungen erfodert wird die das vorgetragene Verfahren verlangt, als zulänglich bekannt annehmen.

Gebrauch hievon zum Verzeichnisse der Fixsterne.

651. Wenn eines Sterns Rectascension bekannt ist lassen sich daraus aller übrigen ihre finden, (Astr. 104.)

Hr. de la Caille hat durch das nur beschriebene Verfahren, die Rectascensionen der Leyer u. des Sirius aufs genaueste bestimmt, und aus ihnen der andern Sterne ihre hergeleitet.

So ist sein Verzeichniß der Fixsterne entstanden in welchem die Stellen der Sterne für den Anfang des Jahres 1750 angegeben sind.

Seine Astronomiae fundamenta, nouissimis solis et stellar. obseru. stabilita (Paris 1757. 4) geben zugleich von der Art wie dieses Verzeichniß ist verfertiget worden und von den dieserwegen angestellten Beobachtungen Rechenschaft. Das Verzeichniß selbst, findet man aus diesem Buche an unterschiedenen andern Orten, z. E. jährlich in den Wiener Ephemeriden.

Wenn

Wenn man zwo Beobachtungen wie 631; 632; hat, die Zeit des Sonnenstillstandes zu finden.

652. Weil der Kolur der Sonnenwenden, mitten zwischen den Abweichungskreisen der Sonne bey beyden Beobachtungen liegt, so gehört die Zeit, wie lange dieser Kolur nach dem Sterne durch den Meridian geht, dem Bogen $\frac{1}{2}(r + \varrho)$ (634)

Man bemerke also wenn der Stern soviel Zeit als diesem Bogen gehört, vor der Sonne durch den Meridian geht; Allsdenn ist die Sonne im Kolure der Sonnenwenden.

653. Weil sich die Sonne in diesem Kolure, wiederum nicht gleich an einem Mittage befinden wird, so muß man aus der Beobachtung die man am Mittage anstellen kann das Uebrige durch Regel Detri berechnen.

654. **Exempel.** Aus den vorigen Beobachtungen ist $\frac{1}{2}(r+\varrho) = 172^{\circ}\,52^{'}\,58^{''},5$

$K = 170\;53\;10,5$

$L = 1\;59\;48$

K bedeutet den Bogen, welcher der Zeit gehört um die der Stern vor dem Mittage des 19 Jun 1749. durch den Meridian gegangen war;

L, wie viel dieser Bogen kleiner ist, als der, um welchen der Stern vormittage hätte durch den Meridian gehen müssen, wenn sich die Sonne am Mittage gleich im Kolure befunden hätte.

Es ist $L = 7188^{''}$

Um soviel also mußte von dem Mittage des 19 Jun. an, die Rectascension der Sonne wachsen, bis die Sonne in den Kolur der Sonnenwenden kam.

Aus Beobachtungen, oder der genugsam bekannten Theorie der Sonne, wußte man, wieviel um diese Zeit ihre Rectascension in 24 Stunden wuchs.

Es betrug $1^{\circ}\ 2^{'}\ 23^{''} = 3743^{''}$.

Man macht also die Proportion

$$3743 : 7188 = 24 : 46,089$$

Das letzte Glied ist 46 h 5 m 20, 4 s

So viel Zeit nach dem Mittage des 19 Jun kam also die Sonne in den Kolur; also den 20 Jun. 22 h 5 m 20, 4 s nachmittage.

Hr. de la L. Astr. 583 I; 880 II; führt dieß Beyspiel aus dem de la C. an.

Ohne Zweifel hat die Witterung den 20 Jun. nicht verstattet, Beobachtungen wie den 19; anzustellen; sonst hätte die Sonne von dem Mittage dieses Tages noch eine kleinere Aenderung ihrer Rectascension nöthig gehabt.

Aus eben dergleichen Beobachtungen, die Zeit der Nachtgleiche zu bestimmen.

655. Man weiß des Sterns Rectascension für die Zeit der ersten Beobachtung (631; 644) also wie weit er von der Frühlingsnachtgleiche absteht, folglich wieviel vor oder nach der Sonne er durch den Meridian gehen muß wenn sie sich in der Nachtgleiche befindet.

Man bemerke also, wenn dieser Unterschied beyder

der Durchgänge statt findet und verfahre übrigens wie bey der Sonnenwende.

656. Ex. $M = 83^\circ\ 49'\ 18'',8$

$N = 82\ \ 53\ \ 7\ ,5$

$M - N = \quad\ 56\ 11\ ,3$

N bedeutet, den Zeitbogen, wie lange der Stern vor der Frühlingsnachtgleiche durch den Meridian geht (644); N, wie lange er vor dem Mittage des 21 März durch den Meridian ging.

Also war denselben Mittag, der Sonne Rectascension $= M - N = 3371'',3$

Sie änderte aber um diese Zeit ihre Rectascension in 24 St um $54'\ 32'' = 3272''$

Also giebt das letzte Glied nachstehender Proportion, wie viel Stunden vor dem Mittage des 21. May die Rectascension $= 0$; war:

$3272 : 3371,3 = 24 : 24,728$

Die Decimalbrüche der Stunde betragen 43,680 m also fast 44 m;

Also war die Sonne in der Nachtgleiche den 19 März 23 h 16 m

666. Zu völliger Schärfe solcher Berechnungen, ist nöthig auch des Sterns Rectasension, für die jedesmahlige Zeit, des Sonnenstillstandes, der Nachtgleiche, so zu bestimmen wie man sie (643) verbesserte.

Diese kleinen Verbesserungen sind hie weggelassen, damit man die Methode leichter übersieht.

667. Ob man gleich bey diesen Beobachtungen

der

der Sonne Rectascension nicht unmittelbar aus ihrer Abweichung schließt, und folglich dem Fehler (619) nicht ausgesetzt ist; So werden sie doch, durch die unvermeidliche Ungewißheit in Messung der Höhen, zu solchen Jahreszeiten unsicher, da sich die Abweichung der Sonne langsam ändert.

Etwa 15° von der Sonnenwende ändert sich die Abweichung um 5'' in 20 Minuten Zeit. Ist man also bey der Mittagshöhe um 5'' ungewiß, so schreibt man der Sonne im Mittage eine Abweichung zu, die sie ohngefähr 20 Minuten früher oder später hat.

Dieser Fehler wird wiederhohlt wenn man bey der zweyten Beobachtung die Zeit sucht, wenn die Sonne die Abweichung der ersten hatte, oder, umgekehrt wenn sie, am Tage der ersten Beobachtung, die Abweichung der zweyten hatte.

Daher ist die bequemste Zeit, nach dem angeführten Verfahren, Rectascensionen von Sternen, und die Zeit der Nachtgleichen selbst zu bestimmen, zunächst um die Nachtgleichen.

668. Man sieht leicht daß sich hieraus die Länge des Jahres bestimmen läßt (Astr. 120) dieses aber, nebst den Erinnerungen Astr. 122; 249; gehört nicht zu meiner jezigen Absicht.

Aus einem ähnlichen Grunde, erwähne ich nur als eine Nachricht, daß Halley ein Verfahren angegeben hat, vermittelst eines grossen Gnomons, die Solstitien zu beobachten. Phil. Transl. 1695. Man findet es beym Gregori El. Astr. L. III. Prop. XI;

und analytisch erläutert beym Wolf El. Astr. 659 u. f. §.

Wie viel Zeit die Sonne braucht durch einen gegebenen Scheitelkreis zu gehen.

669. Der Sonne Mittelpunct sey in S; 21 Fig Z B ein Scheitelkreis der sie berührt, also S B ihr scheinbarer Halbmesser $= \mu$; und das Kugeldreyeck ZSB bey B rechtwinklicht.

670. Der Sonne Weite vom Pole P S; führe man in den Scheitelkreis Z B; daß P E = P S;

Weil man in einer kurzen Zeit, die Veränderung der Abweichung nicht betrachtet, so nimmt man an, der Sonne Mittelpunct werde in E seyn, wenn er sich im Scheitelkreise Z B befindet.

671. Also mißt der Winkel SPE; oder der ihm zugehörige Bogen des Aequator, die Zeit welche zwischen der beyden Augenblicken verstreicht, wenn der Scheitelkreis Z B die Sonne berührt und wenn er ihren Mittelpunct enthält;

Das ist die Zeit in welcher der Halbmesser der Sonne durch den Scheitelkreis zu gehen scheint.

672. Diese Zeit verdoppelt, kann man für die Zeit des Durchganges der ganzen Sonne annehmen ob solches gleich in der völligen Schärfe nicht richtig ist, weil der Parallel der Sonne schiefe Winkel mit dem Scheitelkreise macht, folglich wenn sich der Mittelpunct der Sonne im Scheitelkreise befindet, die Lage beyder Hälften der Sonne die der Scheitelkreis macht, gegen ihn nicht ganz einerley ist.

Methode das Gesuchte in völliger Schärfe zu finden.

673. Das Dreyeck Z S P ist hie eben das in 1 u. f. betrachtete. Man brauche für dasselbe die dortigen Zeichen, und nehme alle seine Theile als bekannt an.

674. Im Dreyecke Z S B hat man also (669)

$$\sin BZS = \frac{\sin \mu}{\cos \eta} = \sin \mu . \sec \eta$$

$$\cos BZ = \frac{\sin \eta}{\cos \mu}$$

$$\cos BSZ = \text{tang } \eta \text{ tang } \mu$$

675. Man nenne $BZS = m$; Wenn die Höhe nicht beynahe so 90° ist hat man $m = \frac{\mu}{\cos \eta}$ weil μ nie viel über 16' beträgt.

676. Man hat also $BZP = \alpha + m$

Und daher im Dreyecke E Z P, den genannten Winkel, und die Seiten Z P; P E;

Daraus Z P E

677 Folglich $SPE = ZPS - ZPE$ wo man Z P E schon hat (673)

678. Bey der Anwendung muß man die Aenderungen bemerken welche jedes Exempel etwa erfodert.

679. Als: Wenn ein Beobachter in der heissen Zone, die Sonne vormittage zu der Zeit sähe, wenn ihre nordliche Abweichung grösser ist als seine Polhöhe;

Soll allsdenn noch P den Nordpol bedeuten, so ist wenn die Sonne steigt BZP kleiner als SZP, oder $BZP = \alpha - m$

680. Man hat auch $\sin ZEP = \frac{\cos \varepsilon \sin(\alpha+m)}{\cos \delta}$

$= \frac{\sin(\alpha+m)}{\sin \alpha} - . \sin \sigma$; Man nenne $ZEP = \Sigma$

681. Wenn also α in Vergleichung mit m ziemlich groß ist, so ist ohne merklichen Irrthum $\Sigma = \sigma$

Ueber die Grösse von m.

682. Dieser Winkel, kann sehr groß werden, und selbst bis zum rechten anwachsen, wo die Sonne grosse Höhen bekommen kann (674) also in der heissen Zone.

683. Man setze $\mu = 16'$ so wird dieser Winkel ein rechter, wenn die Sonne die erwähnte scheinbare Grösse hat und 89° 44' hoch steht.

Weil sie aber in der heissen Zone, vertical werden kann, so kann ihre Höhe noch grösser werden als die genannte, und da giebt die Formel für sin m gar was Ungereimtes, daß er nähmlich über 1 bis ins Unendliche wüchse.

Dieses zeigt offenbahr soviel an, allsdenn gebe es keinen Scheitelkreis, der die Sonne berührt.

684. Zur Erläuterung: befinde sich ein Beobachter, unter dem Aequator ZO, 22 Fig. am Aequinoctialtage. Der Mittelpunct der Sonne S, sey vom Scheitel nur um ihren Halbmesser entfernt.

So ist der berührende Scheitelkreis, hie der Meridian, der allerdings mit SZ einen rechten Winkel macht. Steigt der Mittelpunct höher, so umgiebt die Sonnenscheibe den Scheitel, und es giebt also keinen Scheitelkreis der sie berührte.

685. Auser der heissen Zone aber, bleibt m allemahl von mässiger Grösse, wie man leicht sieht wenn man 16^1 mit der Secante der größten Mittagshöhe der Sonne multiplicirt.

Für 30° ist der Sonne größte Mittagshöhe um den längsten Tag etwa 83°, die Secante davon etwa 8, 2, und m etwas über 2°

Für 50° Polhöhe wird dieser Winkel nicht viel über 35^1

Eine bequemere Formel die beynahe wahr ist.

686. SE bedeute, nicht einen Bogen eines größten Kreises, sondern das Stück des Parallels der Sonne, das sie beschreibt bis ihr Mittelpunct in den Scheitelkreis ZB kömmt.

687. Man nehme an, die Puncte S, B, E, sind so nahe beysammen daß man SEB für ein geradelinichtes Dreyeck ansehen darf, das bey B rechtwinklicht ist.

688. Der Bogen PE steht auf dem Bogen ES senkrecht also machen die Winkel ZEP, SEB zusammen einen rechten aus.

Also ist $SEB = 90° - \Sigma$

Und $ES = \frac{\mu}{\cos \Sigma}$

Folglich $SPE = \frac{\mu}{\cos \Sigma \cos \delta}$

$= \frac{\beta}{\cos \Sigma}$

Wenn β den Bogen bedeutet, welcher der halben Zeit gehört, die die Sonne braucht durch einen Stundenkreis zu gehen (Astr. 227; VIIII)

Da wird man nach 681; σ statt Σ setzen dürfen.

689 Allsdenn gehört $\frac{\beta}{\cos \sigma}$, der Zeit, welche die halbe, oder die ganze Sonne, braucht, durch den Scheitelkreis zu gehn, nachdem β den Bogen bedeutet, welcher ihrem halben oder ganzen Durchgange durch den Stundenkreis gehört.

690. Setzt man statt β, nicht den Bogen, den dieser Buchstabe eigentlich bedeutet, sondern die Zeit selbst der er gehört, so giebt die Formel, sogleich auch die Zeit selbst, welche die Sonne braucht durch den Scheitelkreis zu gehn.

691 Bey dieser Formel ist offenbahr eine Schwürigkeit wenn σ einem rechten Winkel nahe ist; da giebt sie ES sehr groß, selbst bis an einen unendlichen Werth. Diese Folgerung aber wiederspricht der Voraussetzung (688) Also wäre die Formel in diesem Falle nicht sicher zu brauchen.

Ein rechter Winkel, kann der parallactische nur in der heissen Zone werden (24) auser ihr, ist der grösste parallactische Winkel immer desto kleiner, je

grösser

gröſſer die Polhöhe iſt (22; VIII) in unſern Gegenden nie über 40°.

Da giebt alſo die Formel nichts Wiederſprechendes, und läßt ſich ſicher brauchen.

Wieviel Zeit die Sonne braucht durch einen Kreis der mit dem Horizonte parallel liegt zu gehen. 23 Fig.

692. Im Scheitelkreiſe ZS ſey SC der Halbmeſſer der Sonne, alſo ihr verticaler Halbmeſſer. Man lege durch C einen kleinen Kreis, dem Horizonte parallel, den der Bogen PS um den Pol geführt, in F ſchneide, daß PF = PS.

So ſteigt der Mittelpunct der Sonne aus S in F, und die Zeit welche er dazu braucht wird durch den Winkel SPF gemeſſen, den man alſo ſuchen muß.

693 Dieſer Winkel giebt die Hälfte der Zeit welche die Sonne braucht durch den Kreis CF zu gehn; in eben der Bedeutung wie SPE 21 Fig die Hälfte der Zeit durch den Scheitelkreis (672)

Das Geſuchte in völliger Schärfe zu finden.

693. Ich nehme an daß man Alles im Dreyecke ZSP weiß.

Im Dreyecke ZPF; hat man die drey Seiten ZP; PF; und ZF = 90° — η — μ; Alſo den Winkel ZPF;

Folglich ZPS — ZPF oder SPF;

Formel die beynahe wahr iſt.

694. Des Stundenwinkels Aenderung SPF; ge-

hört der Zeit zu, welche der Mittelpunct der Sonne braucht, seine Höhe, um ihren Halbmesser zu ändern.

Also setze man in 47; I; μ statt $d\eta$; so bekömmt man

$$SPF = \frac{-I}{\sin\sigma.\cos\delta}.\mu$$

$$= \frac{-I}{\sin\sigma}.\beta$$

wo nach der verschiedenen Bedeutung von β; (689) die letzte Formel dem halben oder ganzen Durchgange gehört.

695 Eben die Formel findet man auch, wenn man das Dreyeck CSF, für geradelinicht, bey C rechtwinklicht annimmt.

SF ist ein Stückchen des Parallels der Sonne; macht also mit PS einen rechten Winkel, daher ist

$$CSF = 90° - \sigma; \text{ und } FS = \frac{\mu}{\sin\sigma},$$

$$\text{Aber } FPS = \frac{FS}{\cos\delta}, \text{ woraus der Satz folgt.}$$

699. Man kann statt β die Zeit setzen, wie (690) so hat man durch die Formel sogleich die Dauer des Durchganges durch den horizontalen Kreis.

697 Hr. de la L. Astr. 596; 597; I; 896; 897; II; giebt die Formeln 686; 695; auf die Art wie ich in erwähnten Absätzen verfahren habe, von dem Uebrigen was ich beygebracht habe, hat er nichts.

Wie-

Wieviel Zeit die Sonne braucht auf und unter zu gehen.

698 Wenn man den Mittelpunct der Sonne in den Horizont, also ihre Höhe = o setzt, so gibt die Formel (695) diese Zeit.

Der Parallactische Winkel für diesen Fall heisse q; so ist $\text{col}\, q = \frac{\text{sin}\, \varepsilon}{\text{col}\, \delta}$ und die halbe Zeit des Auf- oder Untergehens gehört dem Bogen

$$\frac{\beta}{\text{sin}\, q} \text{ oder } \frac{\mu}{\sqrt{(\text{col}\, \delta^2 - \text{sin}\, \varepsilon^2)}}$$

699. Im zweyten Ausdrucke ist für eine gegebene Polhöhe der Nenner in den Sonnenwenden am kleinsten. Ferner ist der Zähler am größten wenn sich die Sonne im Steinbocke befindet.

Dieses beydes stimmt also so zusammen, daß die Sonne an unserm kürzesten Tage die meiste Zeit braucht auf oder unterzugehen.

700. **Exempel** für die Polhöhe 51° 32′;

$10 + \log \text{sin}\, 51^\circ 32' = 19{,}8937452$

$\log \text{col}\, 23' 28 \quad = 9{,}9625076$

$\log \text{col}\, q \quad = 9{,}9312376$

$q = 31^\circ 23' +$

Um den kürzesten Tag, braucht die Sonne durch die Mittagsfläche zu gehen etwa 2 m 22, 7 l = 142, 7 l; Also (696)

$$\log 142,7 = 2,1544240$$
$$-\log \sin q = -9,7166387 + 10$$
$$2,4377853$$

gehört zu 274; die Sonne braucht also 4 m 34 s unterzugehn.

Um den längsten Tag geht sie in 2 m 18 s durch die Mittagsfläche, der Nenner in (698) ist für den längsten u. den kürzesten Tag einerley, also braucht sie 4 m 15 s unterzugehn.

Und an jedem Aequinoctialtage 3 m 37 s

701. Weiß man den scheinbaren Halbmesser der Sonne, nebst ihrer Abweichung, und beobachtet die Zeit die sie braucht auf oder unterzugehen, so liesse sich daraus die Polhöhe finden.

Dieß erwähnt der Hr. v. Maupertuis, Astronomie Nautique Probl. X. (Oeuvres de Mr. de M. Lyon 1756. T. IIII) erinnert aber auch dabey, daß dieses sehr unsichere Mittel, nur in Ermangelung aller andern zu brauchen sey.

702. Man sieht leicht, daß bey der Untersuchung 698 u. f. noch Verbesserungen wegen der so beträchtlichen Horizontalrefraction, nöthig wären. Durch die Atmosphäre, erscheint uns ohngefähr die Sonne noch ganz über dem Horizonte, in dem Augenblicke da sie anfängt ganz darunter zu seyn. Für die halbe Dauer ihres Unterganges, wie er durch die Atmosphäre erscheint, müßte also die Höhe des Mittelpuncts nicht $= o$ sondern $= -\mu$ seyn er befindet sich nähmlich um den Halbmesser unter dem Horizonte, wenn er uns im Horizonte erscheint

Es ist aber kaum der Mühe werth, einer Untersuchung, wo eigentliche Observationen nur höchst unvollkommen statt finden, solche theoretische Richtigkeit zu geben.

Ich zeige daher auch nur an, daß sich diese Frage (698) auch aus Formeln die unten (767) vorkommen beantworten liesse, wenn man daselbst, statt h den Halbmesser der Sonne setzte.

Folgerungen wenn man einen Stern zweymahl in einem Kreise der auf die Mittagsfläche senkrecht ist beobachtet hat.

703. Ein solcher Kreis geht durch die Pole des Meridians oder Osten und Westen. Seine östliche Hälfte sey OSM 24 Fig. man beobachte in ihr den Stern in S, und denn das zweyte mahl in der westlichen. Er muß auf beyden Seiten der Mittagsfläche gleiche Höhen haben.

704 Man setze der Bogen des Kreises welcher zwischen die beyden Puncte fällt, wo der Stern in ihm war, sey bekannt;

Dieses Bogens Hälfte ist SM also gegeben, sie heisse ζ; so ist im Dreyecke ZSM; das bey M einen rechten Winkel hat, $\sin\zeta = \sin\alpha . \operatorname{col}\eta$

705. Man setze ferner die Zeit sey beobachtet worden wenn der Stern das erstemahl u. wenn er das anderemahl in diesem Kreise war.

Die Zwischenzeit gehört einem Bogen auf dem Aequator zu, dessen Hälfte den Stundenwinkel

SPM

SPM mißt. Also darf man diesen Stundenwinkel auch als bekannt annehmen.

Aus dem Dreyecke ZSP ist

$$\sin \alpha . \cos \eta = \sin \tau . \cos \delta$$

706 Folglich $\sin \zeta = \sin \tau . \cos \delta$

Von den drey Dingen dieser Gleichung also bestimmen zwey das dritte.

707. Hätte man z. E. Bogen und Stundenwinkel, so fände sich des Sterns Abweichung.

708. Ein dergleichen Kreis ist der Horizont. Da wäre 2ζ der Bogen des Horizonts zwischen den beyden Stellen wo der Stern auf und untergeht, 2τ sein Tagebogen.

709. Gäbe die Beobachtung für einen Stern $\zeta = \tau$ so wäre er im Aequator.

710. Der erste Scheitelkreis ist auch auf die Mittagsfläche senkrecht. Für ihn ist ζ der jedesmahligen Höhe des Sterns Ergänzung zu 90 Graden.

711. So verstehe ich in des Hr. v. Maupertuis Astr. Naut. die VIII. Aufg. Das Verhalten zwischen eines Sterns Abweichung, dem Winkel durch den er geht und der Zeit die er dazu braucht zu finden.

Hr. v. M. erklärt nicht was er durch den Winkel (l'angle que l'astre traverse) versteht, und ich habe erst aus dem Werthe den er für den Sinus dieses halben Winkels annimmt, finden müssen daß er damit einen solchen Bogen wie (704) meynt. Er giebt was ich (706; 707) zeige als den Gebrauch dieser Aufgabe an, zeigt aber nicht wie man diesen Winkel messen soll.

Auser den Fällen 708; 710; sehe ich dazu kein anderes Mittel, als einen Winkelmesser so zu legen, daß sein Durchmesser von dem die Eintheilungen gezählt werden durch Osten u. Westen geht.

Man hat zwo unterschiedene Höhen eines Sternes, und weiß wieviel Zeit zwischen beyden verflossen ist. Man sucht daraus eine Vergleichung zwischen dieser Zeit, den Höhen, der Abweichung und der Polhöhe.

712. Ich will annehmen, man nehme beyde Höhen auf der Ostseite;

Die erste heisse h, die zweyte H, jene ist die kleinste.

713 Nähme man beyde auf der Westseite so käme die grössere zuerst.

714. Ich weiß bey keiner von beyden Höhen den Stundenwinkel, welcher dem Sterne bey ihr zugehört. Indessen nenne ich t den welcher der ersten, T den welcher der andern zugehört.

715. T ist in 712 kleiner in 713 grösser als t; Fielen die Höhen auf entgegengesetzte Seiten der Mittagsfläche, so bekämen die Stundenwinkel entgegengesetzte Werthe.

716. Aus der Zwischenzeit weiß man $2f = t - T$ dem Unterschiede der unbekannten Stundenwinkel.

717. Man nenne $\sin \varepsilon . \sin \delta = m$; $\cos \varepsilon . \cos \delta = n$;

718. Also $\cos t = \frac{\sin h - m}{n}$

$\cos T = \frac{\sin H - m}{n}$

Aber

Aber $\cos T = \cos t . \cos 2f + \sin t . \sin 2f$

Dieses giebt

$$\frac{\sin H - m - (\sin h - m).\cos 2f}{n . \sin 2f} = \sqrt{(1 - (\frac{\sin h - m)^2}{n})}$$

Daraus findet sich, nach gehöriger Rechnung, wenn man $2 \sin f^2$ statt $1 - \cos 2f$ setzt.

$$\frac{\sin H^2 + \sin h^2 - 2.\sin H.\sin h.\cos 2f}{4.\sin f^2} = 0$$

$$+ m^2$$
$$- n^2.\cos f^2$$
$$- m.(\sin H + \sin h)$$

719 Das erste Glied, welches nur durch Höhen und Zwischenzeit gegeben ist, läßt sich auch so ausdrucken $\frac{(\sin H - \sin h)^2}{4.\sin f^2} + \frac{1}{2} \sin H.\sin h$

So wird es leicht durch Logarithmen zu berechnen seyn.

Man nenne dieses erste Glied a;

720. Also; die Werthe von m, n, wieder hergestellt.

$$a + \sin \varepsilon^2.\sin \delta^2$$
$$- \cos t^2.\cos \varepsilon^2.\cos \delta^2 = 0$$
$$- (\sin H + \sin h).\sin \varepsilon.\sin \delta$$

721. In dieser Gleichung, sind Polhöhe und Abweichung völlig auf einerley Art vorhanden.

732. Wenn man sie also so einrichtet daß alles Uebrige, bis auf die Abweichung, als gegeben angesehen, und diese gesucht wird, so findet sich ein Werth für die Abweichung durch die Polhöhe;

Und wenn man in dem analytischen Ausdrucke dieses Werthes, statt der Polhöhe die Abweichung

setzt, so giebt eben der Ausdruck, die Polhöhe durch die Abweichung.

Man suche die Abweichung durch die Polhöhe.

723. Der Cosinus der Abweichung wird weggeschafft und man erhält

$$\sin \delta^2 = \frac{(\sin H + \sin h).\sin \varepsilon}{\quad}.\ \sin \delta$$

$$\frac{1 - \cos \varepsilon^2.\sin f^2 + \cos \varepsilon^2 \cos f^2 - a}{1 - \cos \varepsilon^2.\sin f^2}$$

724. Man setze $\cos \varepsilon \sin f = \sin p$ so ist

$$\sin \delta^2 = \frac{(\sin H + \sin h).\sin \varepsilon}{\cos p^2}.\ \sin \delta$$

$$\frac{+ \cos \varepsilon^2 - \sin p^2 - a}{\cos p^2}$$

Man kann hie die gegebenen Grössen, leicht durch die Logarithmen berechnen also dieser quadratischen Gleichung Coefficienten, und denn ihre Wurzeln finden.

725. Wenn nun $\sin q = \cot \delta . \sin f$ so darf man in 724; rechter Hand nur q statt p schreiben; $\sin \varepsilon$ und $\sin \delta$ mit einander verwechseln. Man bekömmt allsdenn eine Gleichung, deren Wurzeln $\sin \varepsilon$ seyn werden.

726. Hat man aus 724; die Abweichung, so geben sich in (718) die Stundenwinkel. Weis man also die Zeit jeder Höhe, so hat man auch den jedesmahligen Unterschied der Rectascensionen des Sterns u. der Sonne.

725. Also wäre diese Aufgabe bey einem Sterne brauchbar dessen Durchgang durch die Mittagsfläche sich nicht wohl beobachten liesse; z.E. bey einem Kometen der nach seiner Stellung auf der Sphäre, bey Tage durch die Mittagsfläche ginge. Da gäbe sich aus diesen beyden Höhen u. ihrer Zwischenzeit seine Abweichung u. Rectascension. Zum vorausgesetzt daß man seine eigne Bewegung zwischen beyden Höhen beyseite setzen darf.

726. Diese Aufgabe ist in Hr. v. Maup. A. N. Probl. XII. Er schlägt sie auch vor die Polhöhe zu finden wenn man den Stern nicht in der Mittagsfläche beobachten kann.

Cornelis Douwes hat dieses Verfahren sehr umständlich ausgeführt, wie es Schiffer fassen und brauchen können: „Abhandlung wie auf der Mittags auf der See die wahre Mittagsbreite zu finden ist.„ In den Abhandlungen der holländischen Gesellschaft der Wissensch. zu Harlem 1. Theil 1. Stück 6. Abh. auf der 87 S. der deutschen Uebersetzung dieser Abhandl. die ich besorgt habe, und die zu Altenb. 1758 herausgek. aber nicht fortgesetzt worden ist.

Man hat zwo Höhen eines Sterns, und den Unterschied der beyden ihnen zugehörigen Azimuthe. Man sucht das Verhalten zwischen diesen Höhen, dem Unterschiede der Azimuthe, der Polhöhe u. der Abweichung.

727. Die beyden bekannten Höhen, heissen wie

Der Unterschied der Azimuthe $= 2g$
Das erste $= a$; das zweyte $A = a + 2g$
beyde sind unbekannt.

728 So ist $\cos a = \dfrac{\sin \delta - \sin \varepsilon . \sin h}{\cos \varepsilon . \cos h}$

$$\cos A = \frac{\sin \delta - \sin \varepsilon \sin H}{\cos \varepsilon . \cos H}$$

auch $\cos A = \cos a . \cos 2g - \sin a . \sin 2g$
Aus welchen drey Gleichungen auf eine ähnliche Art wie vorhin, eine wird wie die Aufgabe verlangt.

Es ist des Hr. v. M. 13 Aufg.
Weil ich von ihr keinen besondern Nutzen sehe, so will ich mich begnügen diese Methode zu ihrer Auflösung anzuzeigen, indessen doch die Gleichung die er herausbringt, in meine Zeichen übersetzt herschreiben.

$$\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} \cos h^2 + \cos H^2 \\ -2 \cos (A - a) \cos h . \cos H \end{array}\right\} . \cos \delta^2 \\
\left\{\begin{array}{l} +\sin h^2 . \cos H^2 + \sin H^2 . \cos h^2 \\ +\sin (A-a)^2 . \cos h^2 . \cos H^2 \\ -2 . \cos (A-a) . \frac{1}{2} . \sin 2h . \frac{1}{2} \sin 2H \end{array}\right\} \sin \varepsilon^2 \\
\left\{\begin{array}{l} +2 . \cos (A-a) . \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \sin 2h . \cos H \\ +\frac{1}{2} \sin 2H . \cos h \end{array}\right) \\ -2 . (\sin h . \cos H^2 + \sin H . \cos h^2) \end{array}\right\} \sin \varepsilon . \sin \delta \\
-\sin (A-a)^2 . \cos h^2 . \cos H^2
\end{array}\right.$$

Dieß Alles zusammen $= o$

Man weiß von einem Sterne zwey Azimuthe und die ihnen zugehörigen Stundenwinkel. Man sucht daraus die Polhöhe und des Sterns Abweichuug.

729. Die Azimuthe heissen a, A, die Stundenwinkel t, T; so ist (150)

$$\cot a . \sin t + \sin \varepsilon . \cos t = \cos \varepsilon . \tang \delta$$
$$\cot A . \sin T + \sin \varepsilon \cos T = \cos \varepsilon . \tang \delta$$

Diese beyden Werthe einer Grösse gleich gesetzt erhält man

$$\frac{\cot a . \sin t - \cot A . \sin T}{\cos T - \cos t} = \sin \varepsilon$$

Hat man die Polhöhe, so giebt sich aus jeder der beyden ersten Gleichungen, die Abweichung.

720. Der Hr. v. M. Pr. XIIII empfiehlt diese Methode, weil sie den Fehlern der Refraction nicht ausgesetzt ist, wie alle andere Methoden Polhöhe u. Abweichung zu finden.

Vielleicht aber können bey den Azimuthen und Stundenwinkeln noch grössere Fehler begangen werden.

Zweene Sterne kommen nach einander in eine Verticalfläche. Man weiß jedes, Abweichung, Stundenwinkel, und das beyden gemeinschaftliche Azimuth. Man sucht daraus die Polhöhe.

731. Die beyden Abweichungen sind d, D; so ist aus (150) die gemeinschaftliche Cotangente des Azimuth

cos ε.

$$\frac{\cos\varepsilon.\tang d - \sin\varepsilon.\cos t}{\sin t} = \frac{\cos\varepsilon.\tang D - \sin\varepsilon.\cos T}{\sin T}$$

Die Nenner der Brüche weggeschafft und mit dem Cosinus der Polhöhe dividirt erhält man

$$\frac{\tang d.\sin T - \tang D.\sin t}{\sin(T-t)} = \tang\varepsilon$$

Maup. Probl. XV.

Man weiß von zween bekannten Sternen die Stundenwinkel wenn man sie in gleichen Höhen sieht. Man soll daraus die Polhöhe finden.

732. Wenn Stundenwinkel und Abweichungen wie (731) heissen, so sind die beyden Ausdrückungen des Sinus der Höhe

$\cos\varepsilon.\cot d.\cos t + \sin\varepsilon\ \sin d$ und

$\cos\varepsilon.\cos D.\cos T + \sin\varepsilon.\sin D$

beyde gleich gesetzt und mit dem Cosinus der Polhöhe dividirt giebt

$$\tang\varepsilon = \frac{\cos d.\cos t - \cos D.\cos T}{\sin D - \sin d}$$

Maup. Pr. XVII.

Man beobachtet zweene bekannte Sterne in gleichen Höhen, an einem Orte wo man die Polhöhe weiß; Man soll daraus die Zeit finden.

733. Die nur angeführten beyden Werthe des

Sinus der Höhe, gleich gesetzt, geben eine Gleichung, in der nur noch die Cosinus der Stundenwinkel unbekannt sind. Man weiß aber der unbekannten Stundenwinkel Unterschied als den Unterschied der Rectascensionen.

Setzt man also, wie in (514) $T - t = 2q$; so hat man $\cos T = \cos 2q . \cos t + \sin 2q \sin t$
Dieser Werth von $\cos T$, in den zweyten Werth des Sinus der Höhe (732) gesetzt, giebt mit dem ersten Werthe dieses Sinus eine Gleichung, in der nur $\sin t$; und $\cos t$, unbekannt sind, wo man also t aus I. Abh. 69; findet.

734. Diese (524) erwähnte Aufgabe ist Maup. Pr. XVIII; Er bringt sie auf eine quadratische Gleichung deren Wurzeln die Cosinus des einen Stundenwinkels sind. Hr. de la Lande an dem 522 angef. Orte erwähnt auch den Gebrauch dieser Aufgabe nur im Vorbeygehn.

735. Eine Verticalfläche, kann als bestimmt angesehen werden wenn man gleich ihr Azimuth nicht weiß. Jede Mauer deren Lage gegen die Mittagsfläche man nicht aufs schärfste untersucht hätte ist ein Beyspiel davon. Zweene mit Gewichten beschwerte Fäden über einer Horizontallinie bestimmen dergleichen Fläche. Also ist das leicht zu erhalten was in der Aufgabe (514) vorausgesetzt wird.

Folgendergestalt wüßte man, daß zweene Sterne gleiche Höhen haben, ohne diese Höhen selbst zu wissen und ohne daß beyder Azimuth einerley ist:

736. Man stellt sich an der Sphäre Kreise dem

Ho-

Horizonte parallel vor die man mit einem, einmahl arabisch gewesenen Nahmen, Almicantharat nennt. Zweene Sterne haben also gleiche Höhen wenn sie in einen Almicantharat kommen.

Ein Werkzeug damit man einen Almicantharat beschreiben könnte, ohne desselben Höhe selbst zu wissen, wäre eine Diopter, in einem unbekannten Winkel gegen den Horizont geneigt aber so vorgerichtet daß sie sich in andere u. andere Verticalflächen drehen liesse, ohne diesen Winkel zu ändern. Dergleichen Werkzeuge sind 51; VIII. . X erwähnt.

Diese Anstalten mit einiger Zuverlässigkeit zu machen, wäre ziemlich mühsam, und die Mühe würde dadurch belohnt, daß man nun Beobachtungen anstellen könnte, aus denen sich die Zeit wieder ziemlich mühsam herleiten liesse, ich will jezo nicht einmahl untersuchen wie scharf diese Bestimmung der Zeit seyn könnte.

Die leichteste Art so etwas in Ausübung zu bringen wäre meines Erachtens folgende:

737 Wenn man ein Fernrohr befestigte, ohne desselben Lage gegen Horizont und Mittagsfläche genau zu wissen und zweene bekannte Sterne durch dasselbe nach einander gehen sähe, so hätten die beyden Sterne, einer nach dem andern eine Höhe und einerley Azimuth.

738 Allsdenn hätte man so gar noch eine Gleichung, nähmlich zwischen den beyden Werthen der Cotangente des Azimuths durch Abweichung Polhöhe u. Stundenwinkel ausgedruckt (150)

In diesen beyden Gleichungen, davon eine aus der gleichen Höhe, die andere aus dem gleichen Azimuthe folgt, sind nur die beyden Stundenwinkel unbekannt. Die man also daraus finden würde ohne einmahl den Unterschied der Rectascensionen zu wissen.

739. Zu den (736) angezeigten Schwürigkeiten käme aber hie auch noch, die; ob eben ein paar bekannte Sterne nach einander durch das befestigte Fernrohr gehen werden.

740. Allemahl also würde die Zeit deucht mich ziemlich übel angewandt seyn, die man auf die Veranstaltung so unbequemer und unvollkommener Vorrichtungen wendete.

Man hat von einem Sterne drey Höhen, und die Zwischenzeiten. Man sucht daraus seine Abweichung und die Polhöhe.

741. Wenn die bekannte und unbekannte Grössen, bey der ersten Beobachtung wie in (9) benannt werden, und wenn m; n; die Bedeutungen (717) haben so ist bey der ersten Höhe $\cos \tau = \frac{\sin \eta - m}{n}$

wo τ; m; n; unbekannt sind.

742. Aus der Zeit zwischen der ersten und zweyten Höhe, weiß man, wieviel sich zwischen beyden des Sterns Stundenwinkel geändert hat, ob man gleich keinen dieser Stundenwinkel selbst weiß. Eben so, wieviel sich der Stundenwinkel zwischen der ersten u. dritten Höhe geändert hat.

743.

753. Man nehme alle drey Höhen, ostwärts an, und nenne die Stundenwinkel

τ — f bey der zweyten Höhe h

τ — F . . . . dritten . . . H

Da sind f, F, h, H; gegeben.

744. So ist ferner

II) $\cos(\tau - f) = \frac{\sin h - m}{n}$

III) $\cos(\tau - F) = \frac{\sin H - m}{n}$

745. Die Gleichungen I; II; geben

$\cos(\tau - f).(\sin\eta - m) = \cos\tau.(\sin h - m)$

oder

$\left.\begin{matrix}\cos f.\sin\eta \\ -\cos f.m \\ -\sin h \\ +m\end{matrix}\right\}.\cos\tau + (\sin\eta - m).\cos f.\sin\tau = 0$

Also $\tan g\,\tau = \frac{\sin h - m}{\cos f.(\sin\eta - m)}$ — I

746. Wenn man III mit I eben so vergleicht so erhellt, daß daraus auch ein Werth für tang τ folgen muß, der nur H, F, statt h; f; hat. Er ist also

$\frac{\sin H - m}{\cos F.(\sin\eta - m)}$ — I

747. Beyde Werthe gleich gesetzt geben

$(\sin h - m).\cos F = (\sin H - m).\cos f$

Also $m = \frac{\sin h.\cos F - \sin H.\cos f}{\cos f - \cos F}$

748. Weil nun m bekannt ist (747) so weiß man auch r (745) Folglich auch n (741)

719. Folglich, aus 1. Abh. 10; 11;

$$\cos(\varepsilon - \delta) + \cos(\varepsilon + \delta) = 2n$$
$$\cos(\varepsilon - \delta) - \cos(\varepsilon + \delta) = 2m$$
$$\text{also } \cos(\varepsilon - \delta) = n + m$$
$$\cos(\varepsilon + \delta) = n - m$$

750. Also sind Summe und Unterschied, der Polhöhe u. der Abweichung bekannt, daraus man beyde selbst findet.

751. Eigentlich findet man nur zweene Bogen aus ihrer Summe und ihrem Unterschiede. Ob der größte oder der kleinste die Polhöhe ist, das giebt die Rechnung unmittelbar nicht. Denn $\cos(\varepsilon - \delta) = \cos(\delta - \varepsilon)$

Also muß man die Polhöhe wenigstens ohngefähr wissen und einen Stern wählen dessen Abweichung so weit von der Polhöhe unterschieden ist daß man beyde nicht leicht verwechseln kann.

752. Von dieser Aufgabe finden sich, Daniel Bernoullis, Jac. Hermanns, Leonh. Eulers; Friedr. Christoph Mayers, Ge. Wolfg. Krafts Auflösungen; im IIII. Theile der Comm. Acad. Imp. Scient. Petropolit. für 1729. Hr. Dan. Bernoulli setzt ihren Nutzen darein, daß sie keine andern vorherigen Bestimmungen voraussetze und selbst die Unsicherheit der Refraction dabey leicht zu vermeiden sey, weil man einen Stern wählen könne, dessen kleinste Höhe unter den dreyen, über 80° betrage und also fast unbeträchtlich sey.

In

In Maupertuis Astr. Naut ist es die 20. Aufg. M. erklärt sie für mehr sinnreich als nützlich, denn auf dem Lande hat man genug andere Mittel, Abweichungen der Sterne u. Polhöhen zu finden; Auf dem Meere, findet sich die geographische Breite mit mehr Schärfe als man da nöthig hat aus der Abweichung eines bekannten Sterns die man aus Sternverzeichnissen weiß; mit einem Sterne den man nicht schon kennt, wird man so was ohne Gefahr sich zu irren, wenn man seine folgenden Höhen nehmen soll, nicht anfangen.

Die Polhöhe und die Abweichungen zweener Sterne, aus ihren Durchgängen durch zweene Scheitelkreise, und zweene Almicantharathe (736) zu finden.

753. Man bestimme zwo unbewegliche Verticalflächen, die sich nicht ändern, was jede für eine Lage gegen die Mittagsfläche hat braucht man nicht zu wissen.

754. Man bemerke nach der Uhr wenn ein Stern durch jede dieser beyden Flächen geht, ingleichen wenn er durch die Mittagsfläche geht.

So hat man seine Stundenwinkel bey seinen Durchgängen durch die beyden Verticalflächen.

755. Man nehme ein paar Höhen von ihm, und bemerke auch die Zeiten wenn er diese Höhen hat.

So weiß man seine Stundenwinkel als er diese Höhen hatte.

756. Einen andern Stern beobachte man eben so, in den vorigen beyden Verticalflächen und den vorigen beyden Höhen.

So hat man für ihn auch vier solche Stundenwinkel.

757. Nun bezeichne man die Grössen folgendergestalt.

Die unbekannten Abweichungen heissen für
den ersten Stern z
zweyten ζ
Die bekannten Stundenwinkel

Stern	Azimuth	Stundenwinkel
I	I	g
	II	G
II	I	γ
	II	Γ
	Höhe	
I	I	l
	II	L
II	I	λ
	II	Λ

758 Weil die unbekannte Polhöhe doch immer einerley ist so setze man in (731) ζ; z statt d, D; ferner

statt t	T
einmahl g	γ
darnach G	Γ

also

$$\frac{\text{tangz.sin}\gamma - \text{tang}\zeta.\text{sing}}{\text{sin}(\gamma - g)} = \frac{\text{tangz.sin}\Gamma - \text{tang}\zeta\,\text{sin}G}{\text{sin}(\Gamma - G)}$$

759. Ferner setze man in (732;)

statt

statt	t	T
einmahl	l	λ
darnach	l	Λ

also, weil der Nenner beydemahl einerley ist

$$\cos z.\cos l - \cos\zeta.\cos\lambda = \cos z.\cos L - \cos\zeta\cos\Lambda$$

760. Aus (558) kömmt

$$\frac{\sin\gamma\sin(\Gamma - G) - \sin\Gamma.\sin(\gamma - g)}{\sin g.\sin(\Gamma - G) - \sin G\sin(\gamma - g)}.\operatorname{tang} z = \operatorname{tang}\zeta$$

oder; wenn der bekannte Coefficinnt h heißt

$$h.\operatorname{tang} z = \operatorname{tang}\zeta$$

761. Eben so aus (759)

$$\frac{\cos l - \cos L}{\cos\lambda - \cos\Lambda}.\cos z = \cos\zeta$$

oder $k.\cos z = \cos\zeta$

762. Aus (760; 761.) erhält man

$$h.k.\sin z = \sin\zeta$$

Und nun $\sin\zeta$ auch aus (761) gesucht und in gegenwärtiger Gleichung alles Unbekannte durch $\sin z$ ausgedruckt kömmt

$$763.\quad \sin z = \frac{\sqrt{(1 - k^2)}}{k\sqrt{(h^2 - 1)}}$$

764. Hieraus hat man vermöge 760 oder 761; ζ; also nun beyde Abweichungen.

Und nun, aus 731 oder 782 die Polhöhe.

765. Diese Aufgabe hat F. Ch. Maier vorgetragen; Comm. Ac. Petrop. Tom. V. (ad ann. 1730; 1731) pag. 33.

Er zeigt aber fast nur seine Methode zur Auflösung an, nicht die wirkliche Auflösung.

Er

Er empfiehlt diese Methode deßwegen weil sie sehr wenig Zurüstungen brauche, die Almicanthara-te zu bestimmen, verlangt er doch einen Quadranten

Weil hie nicht die Höhen selbst in die Rechnung kommen, sondern nur daß sie gleich sind, so macht die Refraction keine Irrung, zum vorausgesetzt, daß sie bey gleichen Höhen gleich ist.

Beym Hr. v. M. ist es die 21 Aufg. Seine Auflösung ist weitläuftiger als die meinige weil er sich dazu dessen was in 731; 732 enthalten ist, nicht bedienet, sondern die Rechnung aus den ersten Formeln für Azimuth u. Höhe geführt hat.

Uebrigens nennt er sie eine der schönsten und nüz-lichsten, weil sie Abweichungen giebt, ohne daß man die Polhöhe weiß, und umgekehrt, Polhöhe ohne daß man die Abweichungen weiß, und hiezu die einfach-sten Mittel braucht, selbst nicht einmahl Kreisbogen nöthig hat. Hr. v. M. wird also die Gleichheit der Höhen auf andere Art erkennen wollen als ver-mittelst eines Quadranten, etwa wie (736)

766. Ohne mehr zu erfodern als Mayer, läßt sich die Ausübung der Aufgabe noch um ein gutes Theil erleichtern.

Weil man doch bemerken muß wenn die Sterne durch die Mittagsfläche gehen, so nehme man diese selbst für die zweyte Verticalfläche an.

Das giebt G und $r = o$; und $h = \frac{\sin \gamma}{\sin g} \cdot \sin g$

Ei-

Eines unbekannten Sterns Abweichung u. Rectascension zu finden, wenn man ihn, und einen bekannten, durch einerley Veiticalfläche gehen sieht, beyder Höhen, und die Zeit zwischen ihren Durchgängen weiß.

767. Die Verticalfläche sey ZSK 12 Fig. Der unbekannte Stern gehe zuerst in S durch, man weiß seine Höhe = H

Ihm folge nach einer beobachteten Zeit, der bekannte in K; dessen Höhe sey = h;

Die Polhöhe ist auch bekannt.

In dem Augenblicke da der erste in S war, befand sich der andere in M; SPM ist der unbekannte Unterschied ihrer Rectascensionen, wie in 206; III.; nur daß dort dieser Unterschied bekannt war.

Von dem Augenblicke, da der erste Stern in S war, bis auf den da der zweyte in K kam, hat sich des zweyten Stundenkreis, P M, um den Winkel MPK gedreht. Dieser Winkel ist aus der Zwischenzeit bekannt.

Kann man also SPK finden so weiß man den Unterschied der Rectascensionen, und folglich des unbekannten seine.

Kann man PK finden, so weiß man des unbekannten Abweichung.

768. Dieses wird folgendergestalt bewerkstelligt.

Im Dreyecke ZPK weiß man die drey Seiten, daraus findet sich das Azimuth PZK = a

Im Dreyecke ZPS, weiß man die beyden Seiten ZP;

ZP; ZS = 90° — H; und ihren Winkel PZS = a;

Daraus findet sich PS, die Ergänzung der unbekannten Abweichung.

Nun weiß man im Dreyecke SPK alle Seiten, die beyden PS, PK; als Ergänzungen der Abweichungen, und KS den Unterschied der Höhen.

Also giebt sich der Winkel SPK.

769. Man könnte sich auch so verhalten

Aus des Dreyecks PZK Seiten, suche man den parallactischen Winkel ZKP

So hat man im Dreyecke PKS; die beyden Seiten PK; KS; und ihren Winkel PKS

Daraus finden sich

Die Seite PS und

Der Winkel SPK

770 Wenn die unbekannte Abweichung x heißt so ist aus (768)

$$\cos\varepsilon . \cos H . \cos a + \sin\varepsilon . \sin H = \sin x$$

771. Wenn man hie die zusammengehörigen Aenderungen des Azimuth u. der Abweichung suchte so wäre $\frac{-\cos\varepsilon . \cos H \sin a}{\cos x} . da = dx$

Dieses könnte dazu dienen zu bestimmen, wieviel Unrichtigkeit in der Abweichung daraus entstünde, wenn das Azimuth beym unbekannten Sterne ein wenig anders wäre als bey dem bekannten, die Verticalfläche z. E. sich zwischen beyder Durchgängen ein wenig verrückt hatte.

772. Diese Methode ist von dem Churpfälzischen

schen Astronomen Hr. P. Christian Mayer zu Petersburg bey dem Kometen 1769 gebraucht worden. Er maß des Kometen Höhe, ließ die Ebene des Quadranten unverrückt stehen, und maß die Höhe eines bekannten Sterns als solcher in diese Ebene kam.

Man s. sein Werk das bey der Kais. Ak. d. W. zu St. Petersburg 1769 unter folgendem Titel gedruckt ist: Ad Augustiss. Russiar. Imperatricem Catharinam II. Alexiewnam, expositio de transitu Veneris ante discum Solis u. s. w. Im 154 §. dieser Schrift, ist nach einer angeführten Beobachtung, eine Stelle dieses Kometen nach diesem Verfahren berechnet.

Für die Rechnung selbst, finde ich, wenigstens an dem angezeigten Orte, keine ordentliche Vorschrift, und halte daher desto weniger für überflüssig, was ich 767. - 771 gezeigt habe.

773. Alles kömmt wie leicht zu erachten, darauf an, daß die Ebene des Quadranten ihr Azimuth nicht ändert. Hr. P. Mayer hat mich bey seiner Durchreise durch Göttingen versichert, daß er sich dieserwegen auf das Gewicht seines Quadranten verlassen dürfen, den drey starke Männer kaum von seiner Stelle bringen können. Hr. Johann Bernoulli, hat nicht ohne Grund gezweifelt ob dieser Quadrant, dessen Last P. Mayer auch in einer gedruckten Schrift so angegegeben hat, mit zu Petersburg gewesen sey (Lettres Astronomiques lettre 4 p. 60.) Ich weiß dieses aber wie gesagt aus mündlicher Nachricht.

774

774 Uebrigens würden sich wohl leicht durch Schrauben und gewisse Merkmahle, Mittel angeben lassen, eines Quadranten Ebene so zu befestigen, daß man sicher seyn darf sie ändere sich nicht.

Eine Prüfung davon wäre, wenn man den Quadranten so stehn liesse, und Durchgänge eines oder mehrerer Fixsterne zwo Nächte nach einander damit beobachtete. Zweene Durchgänge eines Fixsterns müssen 24 Sternstunden von einander seyn, wenn der Quadrant diese Zeit über seine Lage nicht geändert hat.

775. Das Fernrohr an diesem Quadranten ist beweglich. Ein Quadrant mit unbeweglichem Fernrohre wäre schlechterdings nicht zu gebrauchen, weil kaum möglich ist, daß er nicht beym Umdrehen welches er erfodert, sein Azimuth ein wenig ändern sollte.

Auch das muß man annehmen, daß das bewegliche Fernrohr, aufs genaueste der Ebene des Quadranten parallel ist, sonst würde es doch bey andern Höhen, andere Azimuthe geben.

Ueber die Zeit die ein Stern braucht, eine gegebene Höhe zu erreichen.

776. Wenn der Höhe h; der Stundenwinkel t gehört, und des Sterns halber Tagebogen = b; ist so ist $\cos b = -\tan g\, \varepsilon \tan g\, \delta$

$$\cos t = \frac{\sin h}{\cos \varepsilon . \cos \delta} - \cos b$$

Hat

Hat man also t und b berechnet, so findet sich $x = b - t$ der Bogen des Aequators, welcher der Zeit zugehört, die der Stern braucht, sich vom Horizonte bis an diese Höhe zu erheben, oder von dieser Höhe bis an den Horizont zu sinken.

Ein eigner Ausdruck für den Sinus oder Cosinus dieses Bogens, würde zu verwickelt werden, um brauchbar zu seyn.

777. Die Refraction setze ich hie bey seite; wie sie bey dem halben Tagebogen in Rechnung zu bringen wäre lehret (445) da sie aber auch bey der Höhe vorkömmt, und bey jeder Höhe anders ist so würde sie gegenwärtige Untersuchung für den Nutzen den man davon haben kann viel zu verwickelt machen.

Wie sich diese Zeit ändert wenn sich des Sterns Abweichung ändert.

778. Das ist: $db - dt$ wenn nichts als δ veränderlich ist, wie bey der Sonne statt findet. Da ist

$$db = \frac{\text{tang } \varepsilon . d\delta}{\sin b . \cos \delta^2}$$

$$-dt = \left(\frac{\sin h . \text{tang } \delta}{\cos \varepsilon} - \frac{\text{tang } \varepsilon}{\cos \delta}\right) . \frac{d\delta}{\sin t . \cos \delta}$$

Daraus findet sich $db - dt =$

$$\frac{\sin \varepsilon . (\sin t - \sin b) + \sin h . \sin b . \sin \delta}{\cos \varepsilon \cos \delta^2 . \sin b . \sin t} . d\delta$$

779. Man nenne $\sin \delta = x$ so werden $\sin b$; $\sin t$ ein paar Brüche, deren gemeinschaftlicher Nenner $\cos \varepsilon . \sqrt{(1 - x^2)}$ ist, die Zähler sind

$\sqrt{(\text{col}\,\varepsilon^2 - x^2)}$ für $\sin b$

$\sqrt{(\text{col}\,\varepsilon^2 - x^2 - \sin h^2 + 2\sin h.\sin\varepsilon\, x)}$ für $\sin t$

780 Wenn die Abweichung $= o$; so ist $\sin b = 1$

und $\sin t = \sqrt{(1 - (\frac{\sin h}{\text{col}\,\varepsilon})^2)}$

781. Für diese Voraussetzung wird der Coefficient bey $d\delta$ (778)

$$-\tan g\,\varepsilon.\frac{(1 - \sin t)}{\sin t}$$

782 Wenn also die Sonne aus der Frühlingsnachtgleiche gegen den Nordpol geht, so ist, wenigstens anfangs unweit der Nachtgleiche, das Differential der Zeit die sie braucht, eine gegebene Höhe zu erreichen, verneint, das ist diese Zeit nimmt ab; Es wird also eine Abweichung kommen, bey der diese Zeit am kürzesten ist.

Die Abweichung zu finden bey welcher die Sonne eine gegebene Höhe in der kürzesten Zeit erreicht.

783. Der Zähler in (778) $= o$ gesetzt, giebt

$$\sin\varepsilon.\sin t = (\sin\varepsilon - \sin h.\sin\delta).\sin b$$

784. Daraus wird, nach (779)

$$\sin\varepsilon^2.(\text{col}\,\varepsilon^2 - x^2 - \sin h^2 + 2\sin h.\sin\varepsilon.x) - (\sin\varepsilon - \sin h.\,x)^2.(\text{col}\,\varepsilon^2 - x^3) = 0$$

785. Man wird finden, daß $+1$ oder -1 statt x gesetzt dieser Gleichung genug thut, also sind zwo Wurzeln von ihr $+1$ und -1

786.

786. Wenn man diese Gleichung nach x ordnet, so wird sie

$$x^4 - \frac{2 \sin \varepsilon}{\sin h} \cdot x^3 - \cos \varepsilon^2 \cdot x^2 + \frac{2 \sin \varepsilon}{\sin h} \cdot x - \sin \varepsilon^2 = 0$$

787. Weil sie nun einen quadratischen Factor $x^2 - 1$ hat (785) so nenne man den andern $x^2 + px + q$; beyder Product ist

$$\begin{array}{r|l} x^4 + px^3 + q & x^2 - px - q \\ -1 & \end{array}$$

Dieses Product gegen die Gleichung gehalten, giebt

$$p = \frac{-2 \sin \varepsilon}{\sin h}; \quad q = \sin \varepsilon^2$$

Und der andere quadratische Factor $= 0$ gesetzt, giebt $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$

Hie statt p, q, ihre Werthe gesetzt kömmt

$$x = \sin \varepsilon \cdot \frac{1 \pm \cos h}{\sin h}$$

788. Also sind die beyden Werthe der gesuchten Grösse $\sin \varepsilon \cdot \tang \frac{1}{2} h$ und $\sin \varepsilon \cdot \cot \frac{1}{2} h$

789 Von diesen beyden Werthen ist allemahl der letzte grösser, der erste kleiner, als die Polhöhe, weil $\frac{1}{2} h$ allemahl kleiner als 90° ist.

790 Den einzigen Fall ausgenommen da man zu wissen verlangte, was für eine Abweichung die Sonne oder ein Stern haben müßte in der kürzesten Zeit vertical zu werden. Da käme hie die Antwort: wenn die Abweichung der Polhöhe gleich ist.

Aber kein anderer Stern kann vertical werden als dessen Abweichung der Polhöhe gleich ist und so ist hier die kürzeste Zeit zugleich die einzige.

791 Der letzte der beyden Werthe, wird grösser als 1; wenn der Sinus der Polhöhe grösser als die Tangente der Hälfte der gegebenen Höhe ist. In dem Falle wird er als Werth eines Sinus unmöglich, weil kein Sinus grösser als 1 werden kann.

792. Wenn er aber auch kleiner als 1 ist, so wird er doch bey der Sonne, für einen Ort auser der heissen Zone, allemahl physisch unmöglich, weil sie die ihm zugehörige Abweichung nicht erreicht.

793. Was dieser zweyte Werth bedeutet und wie er in die Gleichung kömmt, versteht man folgendergestalt:

Man fand diese beyden Werthe, aus einer Gleichung welche von der (783) so herkam daß man auf beyden Seiten quadrirte. Aber durch Quadriren hätte man völlig eben das was in (784) befindlich ist, erhalten, wenn statt (783) die dortige Gleichung so geheissen hätte:

$$\sin \varepsilon . \sin t = (\sin h . \sin \delta - \sin \varepsilon) . \sin b$$

Also thun die beyden Werthe von x (788) einer der Gleichung (783) der andere gegenwärtiger genug.

794 Aber $db + dt$ ist ein Product aus $d\delta$ in einen Bruch, der eben den Nenner hat wie der welcher (778) mit $d\delta$ multiplicirt ist, der Zähler davon ist

$$\sin \varepsilon . (\sin t + \sin b) - \sin h . \sin b . \sin \delta$$

Dieser Zähler $= o$ gesetzt giebt die Gleichung (793)

Und

Und also geben die beyden Werthe (788) einer $db - dt = o$; der andere $db + dt = o$

795. Weil nun hier alle Sinusse als bejaht angesehen werden, so ist $\sin \varepsilon - \sin h. x$ für den einen Werth eine bejahte Grösse (783) für den andern eine verneinte. (794)

Das heißt für (783) ist x kleiner als $\frac{\sin e}{\sin h}$;

für (794) grösser.

Aber $\text{tang} \frac{1}{2} h = \frac{1 - \cos h}{\sin h}$; $\cot \frac{1}{2} h = \frac{1 + \cos h}{\sin h}$;

Also ist von den beyden Werthen (788) der kleinere, kleiner als $\frac{\sin \varepsilon}{\sin h}$; der grössere, grösser.

Folglich gehört der grössere nicht zu der Frage (783)

796. Also erlangt die Sonne oder ein Stern, die Höhe h in der kürzesten Zeit bey der Abweichung deren Sinus $= \sin \varepsilon \text{ tang} \frac{1}{2} h$ ist.

797. Noch ist übrig von den beyden Wurzeln (185) Rechenschaft zu geben. Daß sie bey der Frage selbst gar nicht in Betrachtung kommen ist offenbahr, man muß aber doch wissen wie sie in die Gleichung kommen.

Im Pole giebt es keinen Stern. Wäre aber auch einer da, so hätte er keinen halben Tagebogen. Für die Polhöhe $= o$ bliebe er stets im Horizonte. Dieß zeigt auch die Formel für den Cosinus des halben Tagebogens. Dieser Cosinus ist unendlich, also unmöglich, wenn die Polhöhe $= o$ ist.

Eben so wird für den Stern im Pole der Cosinus des Stundenwinkels unendlich, den Fall ausgenommen wenn man die Höhe der Polhöhe gleich setzt, da verschwinden im Ausdrucke des Cosinus zugleich Zähler u. Nenner, und wer die Zeit darauf wenden wollte den Wehrt dieses Bruches zu untersuchen, (An. Un. 372) müßte ihn $= o$ finden weil der Stern stets im Meridiane ist oder vielleicht auch bedeutete dieses $\frac{o}{o}$; die halbe Peripherie und alle Vielfachen der halben Peripherie, denn man kann sich vorstellen der Stern beschriebe um den Pol herum einen unendlich kleinen Kreis, dessen Puncte alle im Meridiane sind.

798. Die beyden Sinusse (779) bekommen zu ihrem gemeinschaftlichen Nenner $\cos \varepsilon . o$; die Zähler werden $\sin \varepsilon . \sqrt{-1}$ für $\sin b$

$(\sin \varepsilon \pm \sin h) . \sqrt{-1}$ für $\sin t$

Das obere oder untere Zeicheu, nachdem $x = +1$ oder -1.

Nun in 783, $\sin \delta = \pm 1$ gesetzt und die nur angegebenen beyden Sinusse statt $\sin t$, $\sin b$, gesetzt mit dem gemeinschaftlichen Nenner multiplicirt und mit $\sqrt{-1}$ dividirt, so kömmt linker Hand wie rechter $\sin \varepsilon . (\sin \varepsilon \pm \sin h)$

Was also die Gleichung (783) sagt, findet statt wenn $\sin \delta = \pm 1$, obgleich dieses gar nicht zur Frage gehört.

799. Diese Auflösung erläutert also folgende beyde analytische Bemerkungen:

I) Das Größte oder Kleinste erfodert gewisse Bedingungen, aber es folgt nicht umgekehrt, daß diese Bedingungen jedesmahl ein Größtes oder Kleinstes geben. (798)

Ein Exempel findet sich auch An. Un. 537.

II) Man kann für eine Frage eine Gleichung finden, die so beschaffen ist, daß man die gesuchte Grösse aus ihr zu finden, beyde Theile der Gleichung auf Potenzen erheben muß. Die Gleichung die so heraus kömmt, kann Wurzeln haben welche zu der Frage nicht gehören. (793)

Das ist ohngefähr eben so was, wie der schon in der Algebra bekannte Satz: Grössen die nicht einerley sind, können doch gleiche Potenzen haben. (An. endl. Gr. 242)

Die kürzeste Zeit selbst in welcher ein Stern eine gegebene Höhe erreicht

800. Ein Ausdruck für b — t, der bey der allgemeinen Untersuchung zu verwickelt werden möchte (776) kann doch hie eher versucht werden, wo auser der allgemeinen Vergleichung zwischen beyder Bogen Cosinussen, auch noch eine zwischen beyder Sinussen gegeben ist (783)

801. Wenn man in der letzten, statt sin δ den Werth aus (796) setzt, so kömmt aus (795)

sin t = cos h. siu b

802. Also aus (776; 801)

$$\cos(b - t) = \frac{\sin h . \cos b}{\cos \varepsilon . \cos \delta} + \cos b^2 + \cos h . \sin b^2$$

Die letzten beyden Theile zusammen sind

$$\cos h + (1 - \cos h) . \cos b^2$$

Und wenn man statt cos b jezo noch den allgemeinen Werth aus (776) setzt, so kömmt $\cos(b - t) =$

$$\frac{((1 - \cos h) . \sin \varepsilon \sin \delta - \sin h) . \sin \varepsilon . \sin \delta}{\cos \varepsilon^2 . \cos \delta^2} + \cos h$$

Wenn man den Sinus der Abweichung nach (796) ausdruckt und $1 - \cos h$ nach (795) so ist

$$(1 - \cos h) . \sin \varepsilon . \sin \delta - \sin h =$$
$$- \sin h . (1 - \tang \tfrac{1}{2} h^2 . \sin \varepsilon^2)$$

Aber was hier in sin h multiplicirt ist, ist das Quadrat des Cosinus der Abweichung

Also kömmt $\cos(b - t) =$

$$\cos h - \tang \varepsilon^2 . \sin h . \tang \tfrac{1}{2} h$$
$$= \cos h - 2 \tang \varepsilon^2 . \sin \tfrac{1}{2} h^2$$

aber $\cos h = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} h^2$

also $\cos(b - t) = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} h^2 . (1 + \tang \varepsilon^2)$

Wenn man hier die Secante durch den Cosinus ausdruckt so kömmt

$$\frac{2 \sin \tfrac{1}{2} h^2}{\cos \varepsilon^2} = 1 - \cos(b - t)$$

Was aber rechter Hand steht ist $2 \sin \tfrac{1}{2} (b - t)^2$

803. Also $\sin \tfrac{1}{2}(b - t) = \frac{\sin \tfrac{1}{2} h}{\cos \varepsilon .}$

804. Daß ich in (802) von $b - t$ den Cosinus nicht

nicht den Sinus suchte, dazu hatte ich die Ursache, weil ich so gleich das Quadrat von sin b bekam, welches sich alsobald vermittelst des Quadrats des Cosinus wegschaffen ließ.

Suchte ich den Sinus, so kam in desselben Ausdruck die erste Potenz' von sin b, welches mir auf eine weitläuftigere Rechnung zu führen schien, wiewohl ich solche nicht fortgesetzt habe, da ich durch gegenwärtiges Verfahren bequem fand was ich suchte.

Dauer der Dämmerung und kürzeste Dämmerung.

805 Weil man annimmt die Abenddämmerung höre auf wenn die Sonne 18 Grad unter den Horizont gesunken ist, so läßt sich bey gegebener Polhöhe u. Abweichung die Dauer der Dämmerung aus (776) berechnen, wenn man $h = -18°$ setzt.

Diese Tiefe unter unserm Horizonte, ist Höhe über den Horizont unserer Gegenfüsser. Man könnte also die Frage auch so beantworten, daß man der unsrigen entgegengesetzte Polhöhe annähme, in der Abweichung der Sonne aber nichts änderte und fragte: wie lange Zeit für diese Polhöhe die Sonne brauchte 19 Grad zu steigen?

Wie man das auf die Morgendämmerung anwendet, das herzuschreiben ist nicht der Mühe werth.

806 Wenn also die Sonne, bey einer gegebenen Polhöhe, die Tiefe von 18° am geschwindesten erreicht, so ist die **Dämmerung am kürzesten**, und die dazu gehörige Abweichung findet sich nach (796).

Die Dauer aus (803). Bey der letzten ist sin $\frac{1}{2}$h verneint, also auch b — t verneint, nähmlich t grösser als b

807 **Exempel** Für die Polhöhe = 51° 32′ ist

log sin ε = 9,8937452
log tang $\frac{1}{2}$h = 9,1997125

log sin δ = 9,0934577

gehört zu 7° 7′

Und weil tang — 9° verneint ist, so ist diese Abweichung südlich.

Die Sonne hat diese südliche Abweichung ohngefähr im 18 Grade der Wage, und im 12 der Fische, um den 11. Octob. u. 1. März.

Für die Dauer

10 + log sin $\frac{1}{2}$h = 19,1943324
log cos ε = 9,7938317

9,4005007

giebt $\frac{1}{2}$ (t — b) = 14° 34′ —

t — b = 29 8 —

welches in mittlerer Zeit 1 h 56 m 12 s beträgt.

808 Aus (803) erhellt, daß die kürzeste Dämmerung desto kleiner ist, je kleiner die Polhöhe ist, also am kürzesten unter dem Aequator.

Daselbst ereignet sie sich in den Nachtgleichen; ihre Dauer gehört einem Bogen von 18 Graden und beträgt also etwa 1 h 12 m mittlerer Zeit.

Immer unter der Voraussetzung, daß keine Dämmerung ist, wenn sich die Sonne tiefer als 18 Grad unter dem Horizonte befindet.

809.

809. Man sieht auch aus der Formel (803) daß die Dauer der kürzesten Dämmerung unter der Polhöhe 81 Gr. einem Bogen von 180 Gr gehörte, oder 12 Stunden betrüge; für grössere aber unmöglich würde.

810. Aus (796; 803;) folgt daß die kürzeste Dämmerung unter der Polhöhe 81° sich ereignet wenn die Sonne 9° südliche Abweichung hat. Ihre Dauer gehört einem Bogen von 180° und beträgt also 12 Stunden.

Bey dieser Abweichung ist der Sonne Mittagshöhe = o (20) Die tägliche Bewegung führt sie so herum, daß sie den Horizont gleich nur berührt, wenn sie dem Scheitel am nächsten steht. Von dieser Berührung, bis an den Augenblick da sie 9° unter dem Horizonte ist, dauert die kürzeste Abenddämmerung. Allein bey dieser Abweichung ist sie 9° unter selbigem Horizonte um Mitternacht, also dauert diesem Orte, seine kürzeste Abenddämmerung, von demjenigen seiner Mittage, in welchem Aufgang u. Untergang beysammen waren, bis zu seiner Mitternacht, folglich 12 Stunden.

Bey grössern Polhöhen, gehörte die kürzeste Dämmerung noch grössern südlichen Abweichungen, da geht die Sonne weder auf noch unter und folglich giebt es keine Dauer der Dämmerung, in der Bedeutung, in welcher das Wort ist erklärt worden (805) daher wird (803) der Sinus des halben Zeitbogens für diese Dauer, grösser als der Sinustotus, das ist unmöglich.

810. Von der Dämmerung, dem Verfahren ihre Dauer zu berechnen, u. der Aufgabe der kürzesten Dämmerung findet man Lehrsätze und historische Nachrichten, in Lulofs Einleitung zur Kenntniß der Erdkugel II. Theil 5. Cap. 556 u. f. H. Bey meiner deutschen Uebersetzung dieses Buches (Gött. u. Leipz. 1755) habe ich mitgetheilet was hier von 776 bis 799 enthalten ist, hier aber habe ich bequemere Bezeichnungen der trigonometrischen Linien, nach Hr. Eulers Art gebraucht, da ich mich dorten der Bezeichnungen bedient hatte, die Hr. v. Maup. in der Astr. Naut. braucht, dadurch gewann ich hier den Vortheil, daß sich Manches bequemer ausdrücken, und der Gang der Rechnung besser anzeigen ließ.

811 Lulofs u. a. haben die Auflösung mehr aus Betrachtung der Figur hergeleitet. Hiedurch vermeidet man die Mannichfaltigkeit der Wurzeln, auf welche meine algebraische Auflösung führte. Da aber die algebraischen Auflösungen allgemeiner, und leichter zur Rechnung bequem können eingerichtet werden, als oft bey denen statt findet, die auf eine geometrische Analysis gegründet sind, wo z. E. andere Fälle eine andere Figur, und zwar ähnliche aber doch andere Reihe von Schlüssen erfodern, wie hier Höhe in (776) und Tiefe in (805) so schien es mir der Mühe werth, die algebraische Auflösung in ihr gehöriges Licht zu setzen.

812. Hr. de la Lande hat in der ersten Auflage seiner Astronomie, am Ende des XII. B. die Dämmerung nur in einigen Zeilen erwähnt weil die Theo-

rie

rie von ihr keinen beträchtlichen Einfluß in das Uebrige der Astronomie hätte.

In der II. Ausg. aber, hat er eben das. umständlicher davon geredet, auch für die Aufgabe der kürzesten Dämmerung, eine Auflösung Hr. Eulers mitgetheilet, die ich nicht soweit untersucht habe, daß ich wüßte, ob sie anderswo schon gedruckt ist.

Hr. E. bedient sich hie auch mehr der geometrischen Analysis. Er fängt nicht von einem so allgemeinen Satze an, wie (776) sondern sucht gleich die Abweichung bey der kürzesten Dämmerung, aus der Eigenschaft des kleinsten, daß die Dauer dieser Dämmerung ungeändert bleibt, wenn sich die Abweichung ein wenig ändert.

Uebrigens giebt Hr. E. die Dauer dieser Dämmerung zu berechnen, die Vorschrift welche ich aus meiner Formel (803) hergeleitet habe. In dem was ich beym Lulofs hierüber gesagt habe, verhielt ich mich nach (776)

813. Daß die Tiefe von 18° für die Gränze der Dämmerung nicht in gröster Schärfe zu bestimmen ist, begreift man leicht. Hr. de la L. führt aus den Mem. 1751; p. 454; an, daß Hr. de la Caille diese Tiefe auf dem Meere 16° 38′ u. 17° 13′ gefunden habe, Rothman sie 24° annehme, Monius 16; Cassini 15 u. s. w.

814. Will man sich eine sinnliche Vorstellung von Anfange u. Ende der Dämmerung machen, auch allenfalls solche ohngefähr bestimmen, so kann man an das Gestelle einer Weltkugel, einen Kreis mit

dem

dem Horizonte parallel 18 Grad tief unter dem Horizonte befestigen, wozu sich jedem der dergleichen Vorrichtung machen will, leicht Mittel darbieten werden. So was befindet sich bey Weltkugeln, die Hr. Adams, mathematischer Instrumentmacher für des Königs Maj. verfertiget, davon ein paar, als ein Geschenk von der Königinn Maj. auf hiesiger Universitätsbibliothek zu sehen sind.

815. Hr. Adams hat die Beschaffenheit. u. den Gebrauch dieser Weltkugeln in einem eigenen Werke beschrieben: A Treatile, describing the Construction and explaining the use of new celestial and terrestrial globes. Die zweyte Ausgabe ist zu London 1769 herausgek. mit einer umständlichen Vorstellung der Sonnenwelt, und dem Gebrauche der Weltkugeln, sphärische Dreyecke darauf vorzustellen vermehrt. Von dem letzten Gebrauche will ich noch ein paar Worte sagen.

Rechtwinklichte sphärische Dreyecke auf einer Weltkugel vorzustellen.

816. Weil Aequator und Meridian einander rechtwinklicht schneiden, so braucht man für sie nur eine Hypothenuse. Die kann der Höhenquadrant geben, der sich bey den Weltkugeln gewöhnlich befindet und an das Zenith angeschraubt wird.

817. So lassen sich wenigstens unterschiedene rechtwinklichte Dreyecke vorstellen; nicht eben alle, z. E. nicht wohl solche wo die Hypothenuse über ei-

nen

nen Quadranten wäre, aber die welche man vorstellen kann, reichen zu von der Sache einen Begriff zu geben.

Schiefwinklichte sphärische Dreyecke auf einer Weltkugel vorzustellen.

817. Da man den Höhenquadranten am Zenith in jeden Winkel mit dem Meridiane stellen kann, so dürfte man nur noch einen Bogen haben, der durch den Pol ginge, und sich um die Axe der Kugel in jeden Winkel mit dem Meridiane stellen liesse. Ein Kreis der sich auf der Kugel um beyde Pole drehen liesse, wäre hiezu dienlich.

Auf der Erdkugel würde dieser Kreis jeden Meridian vorstellen, auf der Himmelskugel jeden Abweichungskreis oder Stundenkreis.

818 Hr. A. hat einen halben solchen Kreis angebracht und an ihn eine Scheibe die sich auf ihm hin und her schieben läßt, die Stelle iedes himmlischen Körpers auf der Himmelskugel, jedes Ortes auf der Erdkugel zu bezeichnen.

819. Ein solcher Kreis, der Meridian, und der Höhenquadrant, geben mit einander was für ein schiefwinklichtes Dreyeck man will, nähmlich das Dreyeck Z P S von dem sich gegenwärtige Abhandlung anfing.

Allenfalls würde manchmahl nöthig seyn, statt des Höhenquadranten einen halben Kreis zu haben, nähmlich wenn S unter den Horizont fällt.

820. Ohne den Aufwand auf messingene Kreise

zu machen, kann man Papierstreifen auf die gehörige Art um eine Kugel legen, wie ich schon (115) gerathen habe. Dieses reicht zu, durch sinnliche Bilder, sich und andern das Nachdenken zu erleichtern.

821. Hr. A. aber schlägt dieses Verfahren vor, wirklich sphärische Dreyecke auf der Kugel aufzulösen. Dazu gehören freylich eingetheilte Kreise, und so findet man das Gesuchte, durch Constructionen auf der Kugel, wie in der praktischen Geometrie durch Zeichnung der ebenen Dreyecke.

822 Aber nur eine erträgliche Schärfe bey solchen Constructionen zu erreichen, werden Kugeln und Vorrichtungen dabey nöthig seyn, die den meisten Astronomen zu kostbar fallen würden, denn die meisten sind nicht reich.

823 Vielleicht hat man sich vor ein paar hundert Jahren, manchmahl mit solchen Constructionen geholfen, da die Rechnungen vor Erfindung der Logarithmen, und anderer Vortheile, noch viel beschwerlicher waren. Es ist bekannt daß damahls grössere Himmelskugeln sind verfertigt worden, als jezo gewöhnlich sind, daß man sie von Metalle gemacht, und die Sterne unmittelbar auf sie getragen hat. Man sieht noch dergleichen in Cassel.

824 Ich erinnere mich, daß der Hr. de la Lande während seines Aufenthalts zu Leipzig, mir bey Gelegenheit der grossen Kugeln des P. Coronelli die sich auf der dasigen Rathsbibliothek befinden, als einen Vortheil von dergleichen Maschinen angab, daß man dadurch manchmahl etwas ohngefähr bestim-

stimmen könnte, dessen schärfere Berechnung die Mühe nicht belohnen würde. Eben das sagt Er; Astr. 146 I. Ausg. 202; II. A.

Den Aequator jeder Weltkugel, statt des Stundenzeigers zu brauchen.

825. Bekannter massen befindet sich am erhabenen Pole jeder Weltkugel, ein kleiner messingener Kreis in zweymahl zwölf Stunden getheilt mit einem Weiser. Sein Gebrauch ist bekannt. Ich nenne ihn hier **Stundenzeiger**, weil sein gewöhnlicher Nahme, **Stundenkreis** eine andere Bedeutung hat.

826. Man muß diesen Theil der Kugel abnehmen woenn sie geringe Polhöhen oder die senkrechte Sphäre darstellen soll, imgleichen wenn man den Südpol über den Horizont erheben wollte.

Auser diesen Hindernissen die er zuweilen macht, ist auch sein Gebrauch keiner grossen Schärfe fähig; schwerlich kann er Viertheilstunden mit einiger Zuverlässigkeit geben, dazu ist er zu klein, sein Weiser zu grob, und wenn der leztere nicht fest genug an der Axe sitzt, so entstehen noch grössere Fehler.

827. Seine Stelle kann der Aequator mit viel mehr Bequemlichkeit und Richtigkeit vertreten, wenn man nur das bemerkt, daß 15 Grad des Aequators eine Stunde gelten. Ein einziges Beyspiel wird dieses klar machen.

828. Die Zeit des Unterganges der Sonne an einem gegebnen Tage zu finden.

Nachdem man, wie hiezu gewöhnlich ist die Weltkugel auf die Polhöhe gestellt, und den Ort der Sonne unter den Meridian geführt hat, so bemerke man, welcher Punct des Aequators zugleich mit der Sonne im Meridiane ist, und also die Rectascension der Sonne bestimmt.

Nun führe man den Ort der Sonne in den Abendhorizont, und sehe welcher Punct des Aequators jezo im Meridiane ist.

Der Abstand beyder Puncte ist der halbe Tagebogen, und giebt also in Zeit verwandelt das Gesuchte.

Wenn man bey diesem Abstand nicht um einen Grad fehlt, so fehlt man bey der Zeit nicht um vier Minuten, da man nun einen Grad bey einer mässigen Weltkugel ganz wohl bemerken kann, so ist dieses Verfahren gewiß mehr als viermahl schärfer, als das mit dem Stundenzeiger.

Davon hat mich auch eine Probe versichert die ich mit einer mir gehörigen Himmelskugel angestellt habe, welche 1692 zu Leipzig bey Christian Romstet herausgekommen ist und 9, 8 pariser Zoll im Durchmesser hat.

Ich wollte wissen, welche Zeit den 3. April 1772 in Wien die Sonne unterging.

Von der Wiener Polhöhe, 48 Gr 12 M 36 S liessen sich natürlicher Weise auf dem Meridiane dieser Kugel nur die Grade angeben.

Den Ort der Sonne, 14 Gr des Widders unter den Meridian geführt, befand sich des Aequators 13 Grad im Meridian.

Eben

Eben den Ort in den Abendhorizont geführt, befand sich des Aequators 109 Grad im Meridiane.

Der Abstand dieser beyden Puncte, 96 Grad, beträgt 6 Stunden 24 Min. für die Zeit des Unterganges. Im Wiener astronomischen Calender (man wird nun sehen warum ich Wien gewählt habe) ist diese Zeit 6 Uhr 25 Min. angegeben.

829. Hr. Adams hat aus den (826) angeführten Ursachen, von seinen Weltkugeln den Stundenzeiger weggelassen, und den Aequator nach (827) dazu eingerichtet, aber mit einer Vorrichtung welche die Mühe erspart, Bogen in Zeit zu verwandeln. Er hat nähmlich den Aequator selbst, auser den Graden, in 24 Stunden getheilt, und um ihn einen Kreis von dünnen Drate an den Meridian befestigt, an dem sich ein Zeiger zu Andeutung der Stunden verschieben läßt. Auf seinen Kugeln von 18 Zoll im Durchmesser, sind kleine Theile von Bogen und Zeit, noch kenntlich.

Eigentlich hat mich diese Vorrichtung Hrn. Adams auf den angezeigten Einfall (825) gebracht, den ich mich nicht erinnerte irgendwo gelesen zu haben, ob es gleich sehr leicht ist auf ihn zu gerathen. Jezo finde ich ihn beym Hr. de la Lande Altr. I. Buch; 145 §. der I. Ausg. 210 II. Ausg. Da dieses Buch die allerersten Kenntnisse von der Sphäre enthält, so hatte ich mir nicht die Zeit genommen es durchzulesen, und diese Stelle mußte mir von ohngefähr in die Augen fallen.

Ueber den aufgehenden Punct der Ekliptik; und ihren Winkel mit dem Horizonte.

830. EL 25 Fig sey ein Bogen der Ekliptik, vom Meridian bis an den Morgenhorizont, die Sonne in ihm in S.

Man weiß ihre Länge und was dadurch bekannt ist (530; 531); auch

Die Stunde des Tages also EPS = τ Man sucht daraus

Den Punct der Ekliptik, welcher in demselben Augenblicke aufgeht L;

Den Winkel der Ekliptik mit dem Horizonte ELH.

831. Wenn man die 13 Fig mit gegenwärtiger vergleicht, so ist das dortige F; hier S; und der dortige Bogen EF geht nach eben der Richtung nach welcher hie der Bogen ES geht, obgleich E in beyden Figuren nicht einerley bedeutet.

Also ist der Winkel ESP gegenwärtiger Figur durch den Winkel EFG der 13 Fig. folglich aus (531) gegeben.

832; Im Dreyecke EPS hat man also nebst der Seite PS, der Ergänzung der Abweichung noch die beyden anliegenden Winkel.

Daraus findet man PES; PE, ES;

Der culminirende Punct der Ekliptik

833 Dieser ist E; seine Rectascension, ist die Rectascension der Mitte des Himmels (43; XXI)

834;

834; Wenn man ihn also, aus voriger Rechnung als gegeben annimmt so sey für ihn

Länge $= l$
Rectascension $= r$
Abweichung $= a$;
Winkel mit dem Meridiane (531) $= f$;

835. Ich setze die Grössen (834) alle unter 90 Grad, oder die Frühlingsnachtgleiche in der westlichen Halbkugel, über dem Horizonte.

836. Es ist bekannt wie sich für die andern Voraussetzungen, die Zeichen der trigonometrischen Linien ändern.

Der Winkel des Aufganges (angulus orientis)

837. Dieß ist der Winkel ELH den die Ekliptik mit dem Horizonte macht.

Ich verstehe ihn gegen Süden genommen, daß ELR gegen Norden sein Nebenwinkel wäre.

In dieser Bedeutung heisse er n;

838. Im Dreyecke HEL hat man

$$HE = 90° - \varepsilon + a$$
$$HEL = 180° - f$$

839. Sucht man daraus den Winkel des Aufganges, so ist für ihn (II. Abh. 2. C

Dorten	B	b	P
hier	n	$90° - \varepsilon + a$	$180° - f$

also $\cos n = \sin(\varepsilon - a) . \sin f$

840. Aus 532; VI; ist $\sin t = \frac{\sin r}{\sin l}$; also

$$\cos n = \frac{\sin (\varepsilon - a) . \sin r}{\sin l}$$

841. Wenn die Polhöhe grösser ist als die Abweichung, so ist dieser Winkel allemahl spitzig.

Denn r und l sind allemahl zugleich unter oder über 180 Grad.

841. Also ist er auser der heissen Zone allemahl spitzig.

843. In der heissen Zone, wird er 90 Grad und darüber, wenn des Culminirenden Puncts Abweichung so groß und gröſſer, als die Polhöhe wird.

844 Wenn r und l zugleich $= o$ sind, oder die Frühlingsnachtgleiche culminirt, so findet man den Werth (840) folgendergestalt.

Aus 530 II; ist $\frac{\text{tang r}}{\text{tang l}} = \cos \theta$

bey verschwindenden Winkeln aber verhalten sich die Tangenten wie die Sinus. Also ist für diesen Fall

$$\cos n = \sin \varepsilon . \cos \theta$$

Wie man auch findet wenn man das Dreyeck HEL für diesen Fall auflöset.

845. Und auf eben die Art findet sich eben der Werth für den Cosinus des Aufgangswinkels wenn $r = l = 180°$ oder wenn die Herbstnachtgleiche culminirt.

Für

Für den Bogen EL.

846. Aus den gegebenen Dingen (838) hat man für ihn, in II. Abh. 2; E. V Gleichung

dorten	a	B	P
hier	EL	$180° - f$	$90° - \varepsilon + a$

also $\cot EL = -\cos f . \tan g (\varepsilon - a)$

847. Aber $\cos f = \cos r . \sin \theta$ (532; VIIII)

also $\cot EL = -\cos r . \sin \theta . \tan g (\varepsilon - a)$

848. Auser der heissen Zone findet also allemahl folgendes statt

Fällt r zwischen	so ist EL
0 u. 90°	über 90 Gr
90 270	unter
270 360	über

849. Dieses kömmt, wie man sich auf einer Himmelskugel leicht sinnlich machen kann auf folgende Bedingungen hinaus:

850 Wenn r zwischen 0 u. 90° oder zwischen 270° und 360° ist, so befindet sich die Frühlingsnachtgleiche über dem Horizonte, für jenen Fall in der westlichen Halbkugel, für diesen in der östlichen.

Die Herbstnachtgleiche, gegenüber unter dem Horizonte; für jenen Fall in der östlichen H. für diesen in der westlichen.

851. Fällt r zwischen 180° u. 270° so ist die Frühlingsnachtgleiche unter dem Horizonte, westwärts oder ostwärts, nachdem der Bogen kleiner oder grösser als der halbe Kreis ist.

Und die Herbstnachtgleiche gegenüber

Für HL

852. Aus den gegebenen Grössen (838) ist für diesen Bogen in II. Abh. 2. D; II Gleichung

dorten	B	b	p
hier	180 — f,	EL	90° — ε + a

also tang HL = — tang f. cos (ε — a)

853. Und weil (532; VI) $\tang f = \frac{\cot \theta}{\cos l}$ so ist

$$\tang HL = - \frac{\cot \theta}{\cos l} \cdot \cos (\varepsilon - a)$$

854. Weil sich l und r allemahl in einerley Quadranten endigen, also beyder Bogen Cosinus allemahl zugleich bejaht oder verneint sind, so ist HL über oder unter 90 Grad, nachdem EL über oder unter 90 Grad ist (848)

855. Dieses stimmt auch mit sphär. Trig. I. Satz; 9 Zus. überein. ELH ist spitzig (842) nachdem also LH spitzig oder stumpf ist, nachdem ist auch LE spitzig oder stumpf.

Der Neunzigste (nonagesimus)

856. Wenn man von L auf der Ekliptik einen Quadranten LN nimmt so heißt der Punct N der Neunzigste (Grad der Eklipük vom aufgehenden Puncte)

857. Zieht man durch ihn einen Scheitelkreis ZNC, so heiß CN die Höhe dis Neunzigsten (altitudo nonagesimi)

858. Weil dieser Scheitelkreis auf den Horizont senk-

senkrecht steht so geht der Horizont durch seine Pole; also ist auch L C ein Quadrant, und C N das Maaß des Winkels C L N.

Daher ist die Höhe des Neunzigsten, der (840) gefundene Winkel n.

Wenn der Neunzigste in der östlichen oder westlichen Halbkugel ist?

859. Dieses kömmt darauf an, wenn L E unter oder über 90 Grad ist. Also folgt aus (848) Nachstehendes auser der heissen Zone

860 Die Frühlingsnachtgleiche über dem Horizonte oder die Herbstnachtgleiche darunter,
giebt den Neunzigsten östlich
Die Frngl unter, die Hngl über d. H.
giebt den Neunzigsten westlich.

861. Die Bemerkung daß sich l und r allemahl in einerley Quadranten endigen, (854) zeigt bey 848; daß der Neunzigste östlich ist, wenn sich der culminirende Pnnct der Ekliptik in 1 oder 4 Quadranten, also in den aufsteigenden Zeichen befindet und westlich, wenn der genannte Punct in den absteigenden Zeichen ist.

862. Man übersieht hieraus sogleich, daß der Neunzigste weder östlich, noch westlich, sondern im Meridiane seyn muß, wenn der culminirende Punct in der Gränze aufsteigender u. absteigender Zeichen, in einem Solstitialpuncte ist. Allsdenn ist der Neunzigste mit ihm einerley, und die Nachtgleichen sind im Horizonte.

Für E. N.

863. Im Dreyecke Z N E weiß man, nebst dem rechten Winkel N, den Winkel Z E N = f als den Verticalwinkel dessen der in der 13 Fig. mit F bezeichnet ist und die Hypothenuse Z E. Also hat man in II. Abh. 2. E; VIII Gleich.

Dorten	a	B	p
hie	ε — a	f	E N

$$\text{Daher tang E N} = \frac{\text{cos f}}{\text{cot } (\varepsilon - a)}$$

864. Und weil aus 532; VIIII; cos f = cos r. sin θ;

$$\text{so ist tang E N} = \frac{\text{cos r. sin } \theta}{\text{cot } (\varepsilon - a)}$$

Dieser Werth ist dem (847) entgegengesetzt, sonst gleich, oder es ist tang E N = — cot E L also E N = — (90° — E L) oder 90° = E L — E N wie gehörig.

865. Aus einer Betrachtung wie (861) erhellt, daß die Tangente (864) bejaht oder verneint ist nachdem sich der culminirende Punct, in den aufsteigenden oder absteigenden Zeichen befindet.

Und auch, eben aus angeführten, daß die Länge des Neunzigsten l + E N oder l — E N ist, nachdem sich der culminirende Punct in den aufsteigenden oder absteigenden Zeichen befindet.

Also zeigt der Werth von tang E N dadurch daß er verneint wird, nur an, der ihm als bejaht zugehörige Bogen sey verneint, das ist: werde von der

Länge

Länge des culminirenden Puncts abgezogen, wenn man die Länge des Puncts N sucht.

So findet man also die Länge des Neunzigsten.

866. Man kann die Untersuchung von (830) an auch folgendergestalt anstellen.

W; 25 Fig. sey die Herbstnachtgleiche, WODA im Aequator,

Aus dem Bogen A D welcher den Stundenwinkel E P S mißt, hat man seine Ergänzung DO.

Aus der Rectascension der Sonne, hat man was ihr zum halben Kreise fehlt, D W.

Also O W;

Und L O W, die Höhe des Aequators, L W O die Schiefe der Ekliptik.

Daraus findet man im Dreyecke O L W;

Den Winkel OLW; dessen Nebenwinkel die Höhe des Neunzigsten ist, und den Bogen W L; folglich den aufgehenden Punct der Ekliptik.

So steht die Auflösung in Wolf El. Astron. 218.

Wie sich das bisherige für einen Ort in der heissen Zone verhält.

867. Da ist die Höhe des Neunzigsten, (856) ein Quadrant oder drüber, wenn die Abweichung des culminirenden Punctes nach dem erhabenen Pole, so groß, oder grösser ist als die Polhöhe.

Diese Höhe, die grösser als ein Quadrant ist bedeutet wie leicht zu sehen ist von den beyden Bogen des Scheitelkreises durch den Neunzigsten, den größten. So was kömmt auch bey Mittagshöhen vor

Sie zeigt auch an, der Winkel HLE sey stumpf; der Winkel nähmlich, den die Ekliptik mit dem Horizonte eines der in der heissen Zone nordlich wohnt gegen Süden machte.

868. Der Neunzigste, ist überhaupt ostlich oder westlich, nachdem der Werth von cot EL. (847) verneint oder bejaht ist. (859)

Auser der heissen Zone kömmt dieses allein darauf an, ob cos r bejaht oder verneint ist.

869 In der heissen Zone aber, kann der culminirende Punct nach dem erhabenen Pole mehr Abweichung haben als die Polhöhe beträgt.

Allsdenn ist tang $(\varepsilon - a)$ verneint.

870 Um die Sache sinnlicher zu machen will ich annehmen, der Ort in der heissen Zone habe nordliche Polhöhe.

Man wird leicht sehn wie die Sätze die ich so herausbringe, für südliche zu ändern sind.

871 Ein Punct der Ekliptik, dessen nordliche Abweichung x, grösser als ε ist, culminirt diesem Orte gegen Norden, in der Höhe $90° - x + \varepsilon$ vom nordlichen Horizonte, oder in der Höhe $90° - x$ über dem Nordpole.

Diese Höhe nimmt also ab wenn x wächst; ist im Solstitialpunct am kleinsten, $= 90° - \theta + \varepsilon$, und für $x = \varepsilon$ am größten.

872. Wenn also a nordliche Abweichung grösser als die Polhöhe bedeutet und

im ersten Quadranten ist.

so liegt der Punct der diese Abweichung hat, in einer

ner Reihe von Puncten, in der man, nach der Ordnung der Zeichen, zu Puncten kömmt, die immer niedriger und niedriger culminiren.

Das kann man wohl so ausdrucken: Er liegt in absteigenden Zeichen.

Und allsdenn ist cot E L (847) bejaht oder, der Neunzigste ostlich.

873. Weil (869) nur statt findet, wenn der culminirende Punct im ersten oder zweyten Quadranten ist, so darf man hier col r nicht in die beyden setzen, wo die Abweichung südlich ist.

874. Also darf man für die Voraussetzung (869) nur noch annehmen daß r im zweyten Quadranten ist;

Allsdenn ist der culminirende Punct in einer Reihe von Puncten, die nach der Ordnung der Zeichen genommen, immer kleinere und kleinere Abweichungen bekommen, bis auf die welche die Polhöhe gleich ist.

Diese Puncte also nach dieser Ordnung genommen, culminiren immer höher und höher, der letzte in ihrer Reihe, im Scheitel.

Das kann man wohl so ausdrucken: der culminirende Punct befinde sich in aufsteigenden Zeichen.

Und allsdenn ist cot E L verneint oder der Neunzigste ostlich.

875. Wenn also in der heissen Zone, der culminirende Punct nordwärts in der Mittagsfläche ist, so ist der Neunzigste ostlich oder westlich, nachdem der culminirende Punct, in aufsteigenden oder absteigenden Zeichen ist

Nur

Nur diese Benennungen in den Bedeutungen 873; 874; genommen.

876. Und so gilt die (861) gegebene Regel mit eben den Worten auch für die heisse Zone, wenigstens für die Voraussetzung (869)

Für Lagen des culminirenden Puncts aber, wo diese Voraussetzung nicht statt findet, hat die heisse Zone nichts das sie von den übrigen unterschiede; das Einzige ihr eigne ist, daß Puncte der Ekliptik grössere Abweichungen nach dem erhabenen Pole haben können als die Polhöhen in der heissen Zone sind.

877. Zu Erläuterung der Benennungen aufsteigender und absteigender Zeichen, dient folgendes Exempel

Wenn ein Ort 10 Grad Polhöhe hat so wird ihm der Punct der Ekliptik vertical, der soviel nordliche Abweichung hat.

Ein solcher Punct ist im ersten Quadranten, der 26 Grad des Widders.

Die folgenden Puncte von diesem an bis an den Anfang des Krebses, culminiren immer niedriger und niedriger.

Das giebt eine Reihe absteigender Zeichen.

Vom Krebse bis an den 4 Grad der Jungfer, folgt eine Reihe aufsteigender, dieser Grad nähmlich, hat wieder die vorige nordliche Abweichung und wird wieder vertical.

Von diesem Grade der Jungfer bis an den Anfang des Steinbocks, gehen absteigende Zeichen.

Und aufsteigende Zeichen von dem Anfange des

Stein-

Steinbocks, den letzten Quadranten der Ekliptik hin, durch den Widder bis an desselben 26 Grad.

Man sieht hieraus, daß Frühling, Sommer, Herbst, Winter, in der heissen Zone auch nicht auf die Art wie auser ihr abwechseln können, sondern daselbst Jahreszeiten denen man solche Benennungen nach der Analogie der unsrigen geben wollte, nach ganz andern Gesetzen abwechseln müßten.

Solche Gesetze hat Lulofs mühsam bestimmt, Einleit. zur Kenntniß der Erdkugel 518 u. f. §. (meine Uebersetzung dieses Werks, ist zu Göttingen 1755 herausgek.) Ich sehe nicht recht wozu es nützt, Wörter, deren Bedeutungen wir nach unserm Wohnplatze bestimmt haben, an einen Theil der Erdfläche zu zwingen, für den sie nicht gemacht waren.

878. Man nenne also **aufsteigende Zeichen**, eine Reihe von Puncten die immer höher und höher culminiren; **absteigende**, die immer niedriger und niedriger culminiren.

Auser der heissen Zone, im nordlichen Theile der Erde, sind die aufsteigenden im 1 u. 4 Quadranten der Ekliptik die absteigenden im 2 u. 3.

im südlichen umgekehrt

In der heissen Zone aber, lassen sie sich nicht nach den Quadranten abtheilen, und sind für jede Polhöhe anders, wie das Beyspiel zeigt. Die angezeigte Benennung, gilt in und auser der heissen Zone, also kann man von ihr sagen, sie benenne auf und absteigende Zeichen in der allgemeinsten Bedeutung.

879.

879. Man findet also die Länge des Neunzigsten so, daß man zur Länge des culminirenden Puncts, EN als bejaht angesehen, addirt, oder davon abzieht, nachdem sich der culminirende Punct in den aufsteigenden oder absteigenden Zeichen befindet (865.) diese Wörter in der allgemeinsten Bedeutung genommen.

So ausgedruckt, gilt die Regel überall;

Nennt man statt aufsteigender oder absteigender Zeichen; ersten u. vierten, oder zweyten u. dritten Quadranten, so gilt sie nur auser der heissen Zone.

Auf die letzte Art hatte Hr. de la Caille sie ausgedruckt. Hr. de la Lande verbessert sie auf die erste Art. Astr. 1292. I Ausg. 1662. II.

Exempel zu vorhergehenden Formeln.

880. Man nehme die Rectascension der Mitte des Himmels als gegeben an.

So muß man die ihr zugehörige Länge und Abweichung des culminirenden Puncts der Ekliptik berechnen oder aus Tafeln nehmen.

881. Die Schiefe der Eklptik $23^\circ\ 28'\ 20''$ gesetzt, finde ich folgende zusammengehörige Grössen

$$r = 80^\circ$$
$$l = 80\ 49' -$$
$$a = 23\ 9 +$$

Ich setze $\varepsilon = 48\ 50$

also $\varepsilon - a = 25\ 41$

Daher nach 840

log sin (ε — a) = 9,6368859
log sin r = 9,9933515

19,6302374

log sin l = 9,9943975

log cos n = 9,6359399

giebt n = 64° 22′ + für die Höhe des Neunzigsten.

log tang (ε — a) = 9,6820632
log sin θ = 9,6002151
log cos r = 9,2396702

log cot EL = 8,5219485

ist log cot 88° 5′ +
179 60

EL = 91 55 —
also EN = 1 55
und der Neunzigste östlich (868)
Zur Länge des culminirenden Punctes 80° 49′
addirt EN = 1 55

giebt des Neunzigsten Länge = 82 44

882 So findet sich beym Hr. d. l. L. a. a. O. eine Tafel die nach den Rectascensionen des Mittels des Himmels eingerichtet ist, für die Pariser Polhöhe. Das berechnete Exempel ist ein Glied dieser Tafel, und meine Zahlen stimmen mit den dortigen überein, bis auf geringe Unterschiede, die daher rühren können, daß die beyden Rechnungen aus ein wenig unterschiedenen gegebenen Grössen, oder mit ein wenig unterschiedener Schärfe sind geführt worden.

883. Man braucht den Neunzigsten bey der Pa-

rallaxe des Mondes, und den damit zusammenhängenden Rechnungen. Diesen Gebrauch zu erklären, verspare ich auf eine andere Gelegenheit, wegen seines Zusammenhangs mit andern Begriffen.

Schiefe Ascension und Ascensional Differenz.

884 Nächstvorhergehendes, erinnert mich an diese Dinge (Astr. 100) die ich gleich in den ersten Absätzen gegenwärtiger Abhandlung hätte beantworten können, und an die ich die ganze Abhandlung durch nicht gedacht habe, weil sie mir ganz entbehrlich waren. Es ist doch nicht überflüssig hie zu zeigen, wie sie in längst gegebenen Formeln enthalten sind.

Wenn in der 1 Fig. S im Horizonte wäre, so wäre A T sein halber Tagebogen, und auf dem Aequator vom Anfange des Widders erstreckte sich die Rectascension bis an T, die schiefe bis an O, denn O ginge mit dem Sterne auf. Also wäre OT die Ascensionaldifferenz. Oder

Die Ascensionaldifferenz ist der halbe Tagebogen weniger 90°

So gilt die Regel, wenn der halbe Tagebogen grösser als ein Quadrant ist. Ist er kleiner, so wird die Ascensionaldifferenz nach der Regel verneint, das ist die Rectascension ist kleiner als die schiefe.

Also ist diese Untersuchung, und eben so die von der schiefen Descension, in (17) enthalten. Die Rectascension nähmlich wird als gegeben angenommen, und aus ihr, und der Differenz, findet man die schiefe.

Auf-

Aufgehende Bilder der Sterndeuter.

885. Die Sterndeuter, haben von diesen astronomischen Lehren einen eigenen Misbrauch gemacht. Der aufgehende Punct der Ekliptik heißt bey ihnen: Adscendens oder Horoscopus. Den Einfluß den er z. E. in das Schicksaal dessen hat, der gebohren wird in dem dieser Punct aufgeht, haben sie durch ein Bild angezeigt, von dem sie sich so ausgedruckt haben, als ginge es mit dem Puncte der Ekliptik auf.

886 Ich besitze ein Werk in Quart dessen Titel ist: Astrolabium planum in tabulis adscendens u. s. w. Auf der letzten Seite steht: Opus astrolabii plani in tabulis, a Iohanne Angeli a nouo elaboratum, explicit feliciter: Impressum Venetiis per Iohannem Emericum de Spira, alemannum: Anno Salutis millesimo quadringentesimo, nonagesimo quarto, quinto idus Iunii. Die Buchstaben sind durchgängig gothisch.

Da sind nebst einer Menge anderer Bilder, erstlich drey am Anfange jedes Zeichens, die facies heissen, dann eines für jeden Grad des Zeichens, jedem ist die Erklärung beygefügt. Z. E. Prima facies thauri est mercurii et est facies arandi et seminandi, documentor. et sapientie in terris, et in geometria discendi.

Scda e lune, et est potentie, nobilitatis, dignitatis, et necessitatis super populos.

Tertia facies est Saturni, et est miserie, seruitutis, feritatis, necessitatis, et vtilitatis.

Unter diesen Worten, stehen, ein Ackermann, ein Mann mit einem Schlüssel in der Hand, ein Lahmer auf Krücken.

In primo gradu thauri. Adscendit vir thaurum ducens ad macellum, baculum tenens in manu

Homo carnifex erit

Mulier manu tenens caudam vnius equi.

Homo vacans erit et ocioſus.

Was in diesen beyden Beschreibungen der Bilder gesagt wird, steht darunter vorgestellt. Man weiß daß im Lateine der mittlern Zeiten, carnifex ein Fleischer heißt. So wie diese Bilder für die beyden ersten Grade des Stiers, sind die andern alle beschaffen. Jedes ist in eine Figur der zwölf himmlischen Häuser, mit eingeschriebenen Zeichen eingefaßt. Bilder, Buchstaben, Latein, und Gedanken machen zusammen eine vollkommen gothische Harmonie.

887 Hieronymus Vitalis im Lexico Mathematico (Paris 1668) erwähnt bey dem Worte Imagines coelestes, daß Einige, auser den gewöhnlichen Sternbildern, auch in der neunten Sphäre oder dem primo mobili Bilder mahlten, selbst jedem Grade, so zu reden, Hieroglyphen, mit ihren zugehörigen Bedeutungen gäben, wie man in der barbarischen Sphäre, am Ende von Jos. Scaligers Commentar über den Manilius sehen könne. Petrus Aponensis, sonst Conciliator genannt, habe die Eigenschaften der Zeichen, und ihrer einzelnen Grade in 360 Bildern begriffen und in dem grossen und berühm-

ten

ten Gewölbe des paduanischen Hofes (in magna ac celebri aulae patauinae fornice) abmahlen lassen, wo Vitalis sie gesehen hat, sie wären aber durch die Länge der Zeit so unkenntlich geworden daß V. nur muthmaßt, es möchten wohl eben die, von der barbarischen Sphäre seyn. Lucius Bellancius erwähne sie (quaest 5. art 5) mit den Worten: Sunt igitur in nona Sphaera, primo imagines totius signi, deinde facierum, postea graduum, quas scimus: alias quoque reperiri ex natura partium coeli non est negandum, sed iam dictum est, nullam completam scientiam ab hominibus haberi. So weit Vitalis.

Was doch diese Leute sich Alles eingebildet und Andern weiß gemacht haben!

888 In Scaligers Anmerkungen über den Manilius (M. Manilii Astronomicon a Iosepho Scaligero, ex vetusto codice Gemblacensi. . . Arg. 1655) wird die barbarische Sphäre die genennt, welche die Alexandriner gebraucht haben. (Ios. Scal. in apotelesmata Sphaer. barbar. M. Manilii Castig et Notae in angef. Werke 333 u. f S.) Es sind daselbst aus dem Aben Ezra die Decani der zwölf himmlischen Zeichen angeführt, jedes hat deren drey; sie werden sich also mit den Einbildungen die vorhin facies hiessen vergleichen lassen. Sie werden da erzählt wie sie auf der persischen Sphäre, auf der indischen, auf der barbarischen, aufgingen. Mit den (886) angeführten Bildern stimmen sie nicht überein. Auf der barbarischen Sphäre sind es

wirkliche Sternbilder, die mit den Anfängen der Drittheile der Zeichen aufgehen. Das ist also doch noch was Astronomisches, ob es gleich unter jeder Polhöhe anders, und bey einer Polhöhe, wegen des Vorrückens der Nachtgleichen veränderlich ist.

Es entdeckt auch vielleicht das Alterthum, und die Veranlassung dieses Wahnes. Die ersten Beobachter des Himmels, kannten wohl keine andern Werkzeuge, als das natürliche: den Horizont. Auf denselben, auf den Aufgang u. Untergang der Sterne, beziehen sich fast alle ökonomische Anwendungen der Astronomie die man in den alten Schriftstellern findet, und diese Anwendungen sind ohnstreitig die ältesten, gehören mit zu den Veranlassungen welche die ersten Bewohner der Erde hatten, den Himmel kennen zu lernen. Also ist leicht zu begreifen, daß nachgehends der Aberglaube, auch die Sternbilder im Horizonte, vornehmlich betrachtet hat. Die Astrologie soviel ich sie kenne, bekümmert sich größtentheils nur um das was im Horizonte vorgeht zum Beweise, daß ihr Wahn noch aus den ältesten, unwissenden Zeiten herstammt, wo man keine andere Beobachtungen zu machen im Stande war, als vermittelst des Horizonts.

Der beyden andern Sphären, Decani, sind eben solcher Unsinn wie in den angeführten Bildern. Die Abergläubischen, liessen solche Figuren mit geheimnißvollen Worten in Steine schneiden, davon findet man Copien, aus dem Salmasius de annis cli-

climactericis, in Franciſci eröffneten Luſthauſe der Ober und Niederwelt, 22 Diſcurs, 1392 Seite.

889. Eine Unterſuchung, die auch nur für den Aſtrologen wichtig iſt, hängt mit dem aufgehenden Puncte der Ekliptik zuſammen: wieviel Zeit jenes Zeichen braucht, auf oder unterzugehn, oder was für ein Bogen des Aequators, ſich mit ihm durch den Horizont ſchiebt. Manilius trägt ſie aus dieſer Urſache vor . . . nunc accipe, ſigna
Quot ſurgant in quoque loco cedantque per horas,
Partibus vt prendi poſſint orientia certis
Ne falſus dubia ratione horoſcopus erret.
Lib. III. v. 386

Scaliger erinnert in ſeinen Anmerkungen über dieſe Stelle, daß die Aſtronomen ſich oft in Beſtimmung dieſer Zeiten geirrt. Sie ſind wie leicht zu ſehn iſt nach den Polhöhen unterſchieden. Riccioli Alm. nou. L. I. cap. 23 handelt davon.

890 Denen die unter dem Aequator wohnen ſchieben ſich in gleichen Zeiten, gleiche Bogen des Aequators durch ihren Horizont, aus eben dem Grunde, aus welchem ſich durch jeden Meridian, in gleichen Zeiten gleiche Bogen des Aequators ſchieben.

891 Von der Ekliptik, können gleiche Bogen, denen die unter dem Aequator wohnen nicht alle in gleicher Zeit auf oder unergehn, aber entgegengeſezte gleiche Bogen, gehen ihnen, der eine in der Zeit auf, in welcher der andere untergeht z. E. indem die 30 Grade des Stiers aufgehn gehen die 30 Grade des Scorpions unter, wie man ſich leicht

an einer Weltkugel sinnlich machen kann, wenn man die Pole in den Horizont bringt.

892 Diese gleiche Zeiten des Auf und Unterge-hens entgegengesetzter Zeichen, hat Lucan ausgedruckt

Deprensum est, hunc esse locum qua circulus alti
Solstitii medium signorum percutit orbem;
Non obliqua meant, nec Tauro Scorpius exit
Rectior, aut Aries donat sua tempora Librae
Aut Astraea iubet lentos descendere Pisces
Par Geminis Chiron, et idem quod Carcinos ardens
Humidus Aegoceros, nec plus Leo tollitur Vrna
Lib. VIIII. v. 531.

893 Scaliger an vorhin angef. Orte hat aus dieser Stelle u. einigen andern, geschlossen, Lucan habe von der Astronomie, die er so oft zu Auszierung seines Gedichtes braucht, nicht viel verstanden.

894 Eine geographische Unrichtigkeit hat Lucan gewiß, wofern ein Criticus in dieser Stelle keine Aenderung zu machen weiß. (man s. unten 899) Was er schreibt, findet nur unter dem Aequator statt der Tempel des Jupiter Ammon lag nicht unter dem Aequator.

Aber Lucan wäre weder der erste noch der letzte Poet, der wissentlich Zeiten und Oerter verändert hätte, eine schöne Beschreibung anzubringen, die bey der Wahrheit nicht statt fand. „Das blutige Messer auf dem Feuerrohre, von Schrecken und Todt begleitet„ ist eine Auszierung der Henriade, lange ehe die Bayonnetten gebraucht wurden, und nie-

niemand würde Voltären tadeln, wenn er, um was Schönes zu sagen, nur in Versen gelogen hätte.

895. Scaliger, wie ich ihn verstehe, giebt dem Lucan noch mehr Schuld: den Gedanken, die himmlischen Zeichen gingen unter dem Aequator senkrecht und in gleichen Zeiten auf und unter, welches sich Lucan von den ältern Astronomen hätte bereden lassen.

896 Astronomen die sicher diesen Irrthum gehegt hätten, nennt Scaliger nicht, und Lucan hegt ihn nicht, wenn man ihm nur die poetische Freyheit verstattet, non obliqua nicht in geometrischer Schärfe zu nehmen, Etwas nicht schief zu nennen, das nicht sehr schief ist. Was er von den entgegengesetzten Zeichen sagt, ist wahr.

897. Clavius in Sphaeram Ioannis de Sacro Bosco cap. III; p. 368 (der Ausgabe zu Lyon 1594) erinnert, daß Sulpitius u. Omnibonus, zweene Ausleger Lucans, ihn so verstanden hätten wie Scaliger, giebt aber die richtige Auslegung an.

898. Indessen bleibt noch dunkel was für ein Kreis im ersten Verse gemeynt ist. In den Anmerkungen über den Lucan die Schrevel gesammlet hat, (Lucan. de Bello Ciu. c. Hug. Grotii, Thom. Farnabii not. integr. et varior. selectiss. accurr. Com. Schreuelio) werden bey dieser Stelle, der Wendekreis des Krebses, der Kolur der Sonnenwenden, der Aequator genannt, aber ohne Gründe für den einen oder für den andern anzuführen, und

wer von diesen Kreisen, mehr als die Nahmen kennt, sieht leicht daß sich keiner völlig hieher schickt.

Für den Kolur wäre lignorum percutit orbem, freylich ein sehr angemessener Ausdruck, und wenn man den Lucan so auslegte: an diesem Orte durchschneidet der Kolur den Thierkreis, so gäbe er freylich eine Stelle so geometrisch an, als man sie nur angeben kann, aber eben diese geometrische Genauigkeit vermuthe ich bey dem Dichter nicht, der die Stelle lieber durch was Sinnliches, durch das Sternbild des Krebses z. E. bezeichnen wird, als durch den Durchschnitt zweener Kreise. Hiezu kömmt, daß allsdenn Lucan sagen müßte, denen die unter der Sonnenwende wohnen, ereignete sich, was er in den folgenden Versen beschreibt, und so was Falsches wollte ich ihn nicht gern sagen lassen. Der Dichter darf die Scene der Begebenheit verändern aber die Scene die er annimmt, muß er der Natur gemäß beschreiben.

Aus eben dem Grunde, kann also der genannte Kreis nicht den Kolur der Sonnenwenden bedeuten.

Und so bleibt für ihn nur der Aequator. Von dem läßt sich allerdings auch sagen, medium lignorum percutit orbem, aber circulus alti solstitii wäre doch eben keine bequeme Benennung für ihn, wenn man auch gleich den Dichtern verstattet, die Nahmen nicht allemahl in mathematischer Richtigkeit zu brauchen, Axe u. Pol, in Bedeutungen zu nehmen, in denen der Astronome sie nicht nimmt.

899. Das Alles zusammen heißt soviel: von

den

den angeführten sieben Versen, sind die ersten beyden für sich, und die letzten fünf für sich, deutlich, aber es ist dunkel, wie die ersten beyden mit den fünf letzten zusammenhängen.

Also wäre die Schwierigkeit gehoben, wenn man diese Verse und die benachbarten, so ordnete, wie ein Spanier Petrus Iaconus vorgeschlagen hat, den Clavius a. a. O. bey Anführung dieser Ordnung (897) virum in omnium artium subtilitate solertissimum nennt.

Hic quoque nil obstat Phoebo, cum cardine summo
Stat librata dies, truncum vix protegit arbor
Tam breuis in medium radiis compellitur vmbra,
Deprensum est huuc esse locum qua circulus alti
Solstitii medium signorum percutit orbem.
At tibi quaecunque es Lybico gens igne diremta
In Noton vmbra cadit quae nobis exit in Arcton,
Te tegnis Cynosura subit, tu sicca profundo
Mergi plaustra putas, nullumque in vertice summo
Sidus habes immune maris, procul axis vterque est,
Et fuga signorum medio rapit omnia coelo,
Non obliqua meant *cet.*

In dieser Ordnung sagten die Verse: Cato sey unter den Wendekreis gekommen, und bey der Gelegenheit schweift Lucan in eine Beschreibung aus, was für Erscheinungen sich den unbekannten Völkern (quaecunque . . gens) jenseit Lybiens darstellen. So hat der Astronome nichts dabey zu erinnern, als die Kleinigkeiten, daß polus vterque statt axis

axis stehen sollte, aber des Syllbenmaasses wegen freylich nicht stehen kann, und daß Lucan zu sagen scheint: Anderswo als unter dem Aequator, gingen die Sterne die man im Scheitel siht, nicht unter. Indessen sagt Lucan dieß nicht ausdrücklich, und gegen einen Poeten, ist aus seinen Ausdrückungen Consequenzen zu machen, noch viel weniger verstattet, als gegen einen Philosophen.

900. Diese Vertheidigung Lucans, wird hie nicht ganz auser ihrer Stelle seyn, da sie sich anders als aus astronomischen Kenntnissen nicht führen liesse. Uebrigens können die Verse welche diese Untersuchung veranlaßten, dem Astronomen noch aus der Ursache nützlich seyn, weil man oft nöthig hat die Zeichen wie sie einander gegen überstehen, zu nennen. Zu dieser Absicht dienen auch ein paar freylich kürzere aber nicht so poetische, beym Hemischius Comm. in Sphaer. Procli. cap. 10. p. 108.

Est Aries Librae; Tauro Nepa, Bina Sagittae
Semicaper Cancro, Dea Piscibus, Vnda Leoni.

Und, wem diese beyden noch zu lang sind, dem giebt Ioannes de Sacro Bosco, a. a. O. (897) einen Hexameter, der seiner Abscheulichkeit wegen werth ist, in einem poetischen Curiositätencabinette aufbehalten zu werden.

Est Lib. Ari. Scor. Tau. Sa. Gemi. Capri. Cancr.
A. Le. Pis. Vir.

Einige

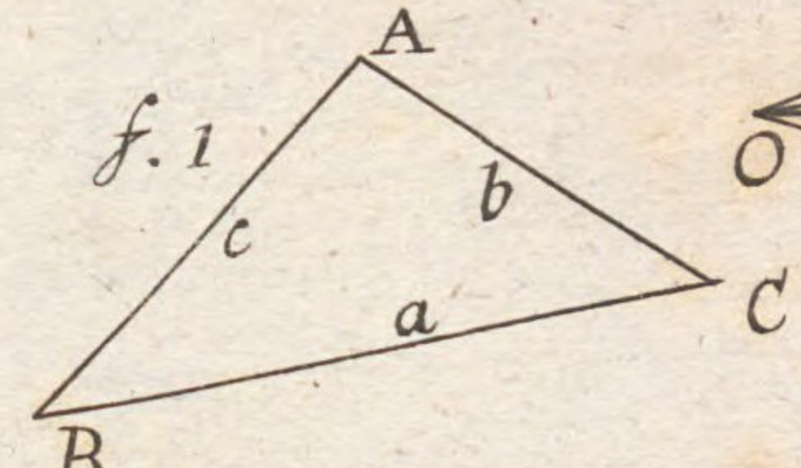
Einige Verbesserungen.

Seite	§	Zeile	statt	lese man
~~41~~		8	Trtg	Trig
~~42~~	206	4	$\frac{1}{2}(f \pm g)^2$	$(\frac{1}{2}(f \pm g))^2$
~~143~~	41	2	u	u

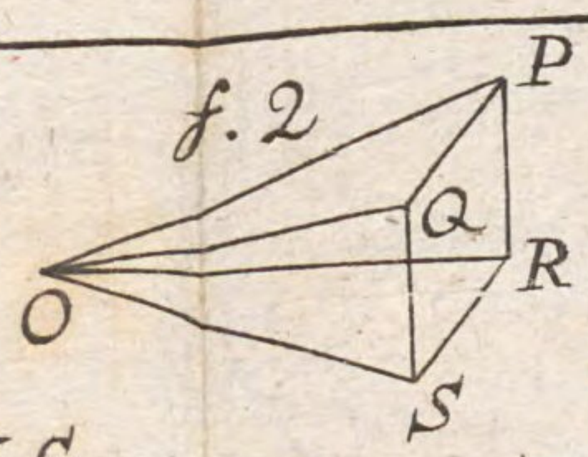
Auf der 331 S. 1 Zeile ist 503, 6 statt 503, 36 gesetzt worden. Ich habe mich anfangs verschrieben, und den Schreibfehler in den folgenden Rechnungen gebraucht. Ich bemerkte diese Unrichtigkeit bey der Correctur, sie ist aber so unschädlich, daß es mir nicht der Mühe werth schien, eine Menge Zahlen zu ändern, nur damit sie gehoben würde.

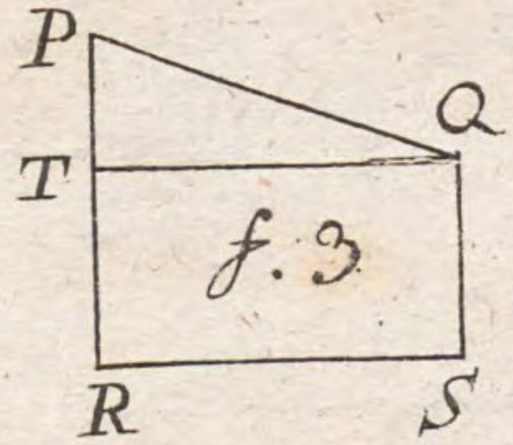
Bayerische Staatsbibliothek München

f. 1

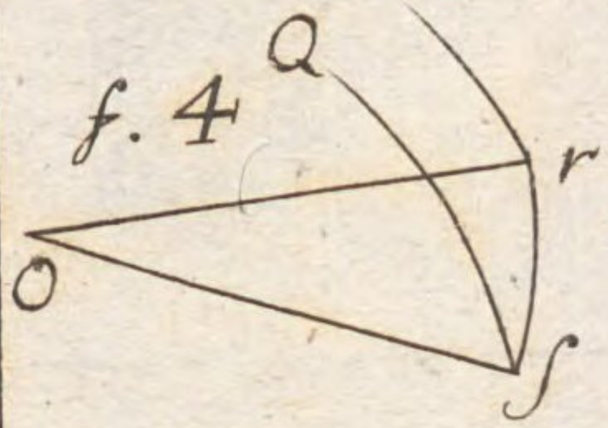


f. 2

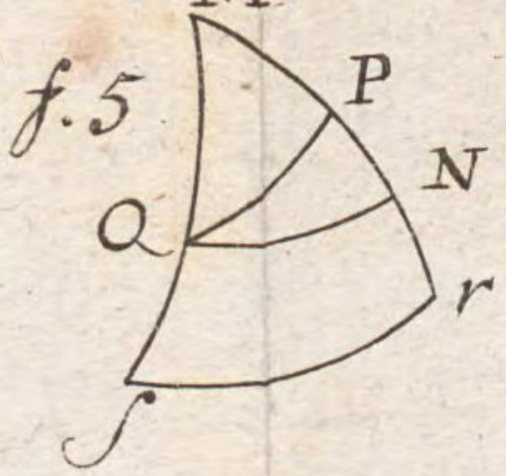




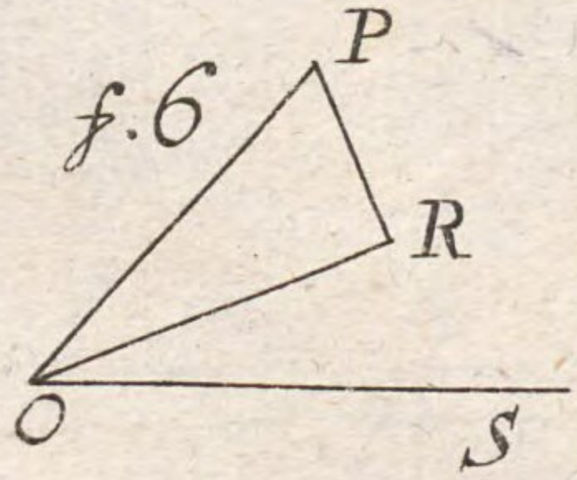
f. 4



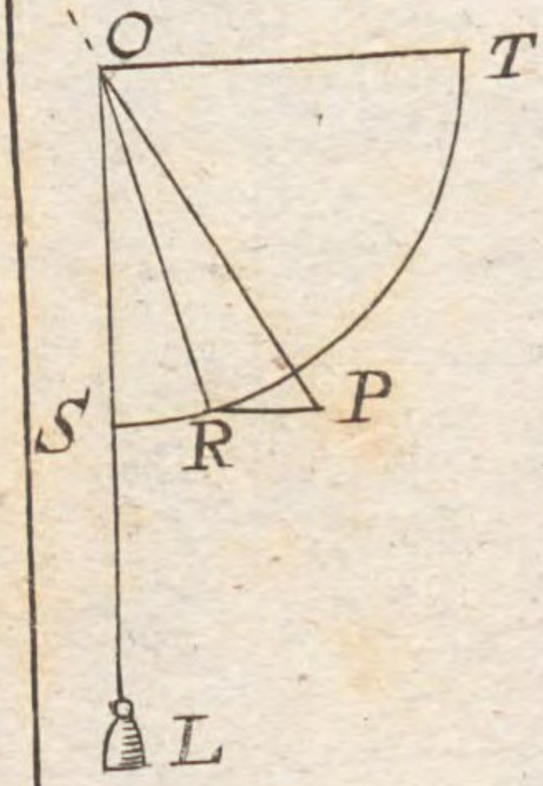
f. 5



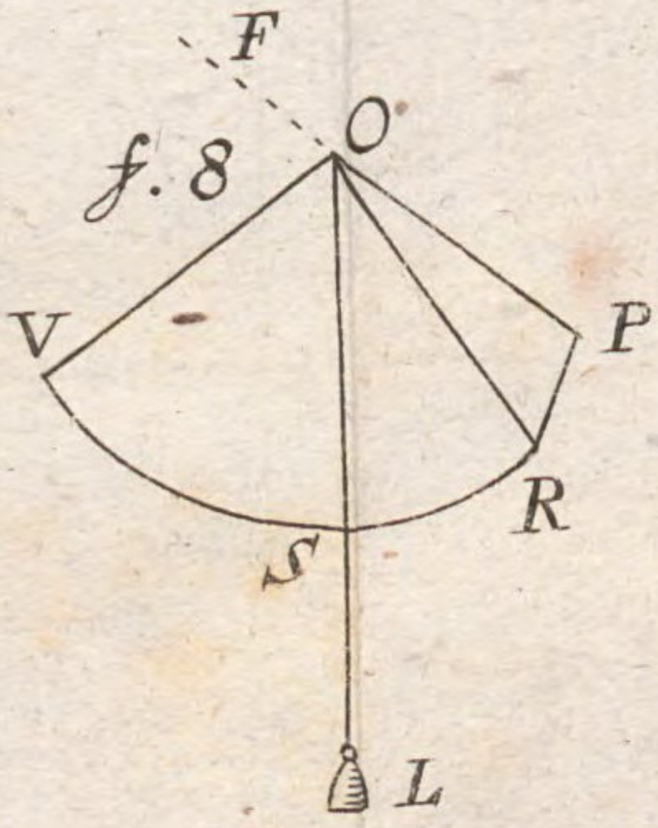
f. 6



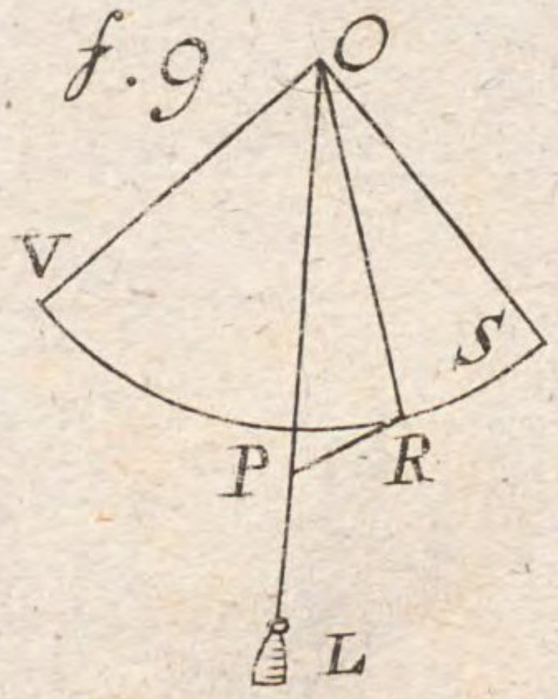
f. 7



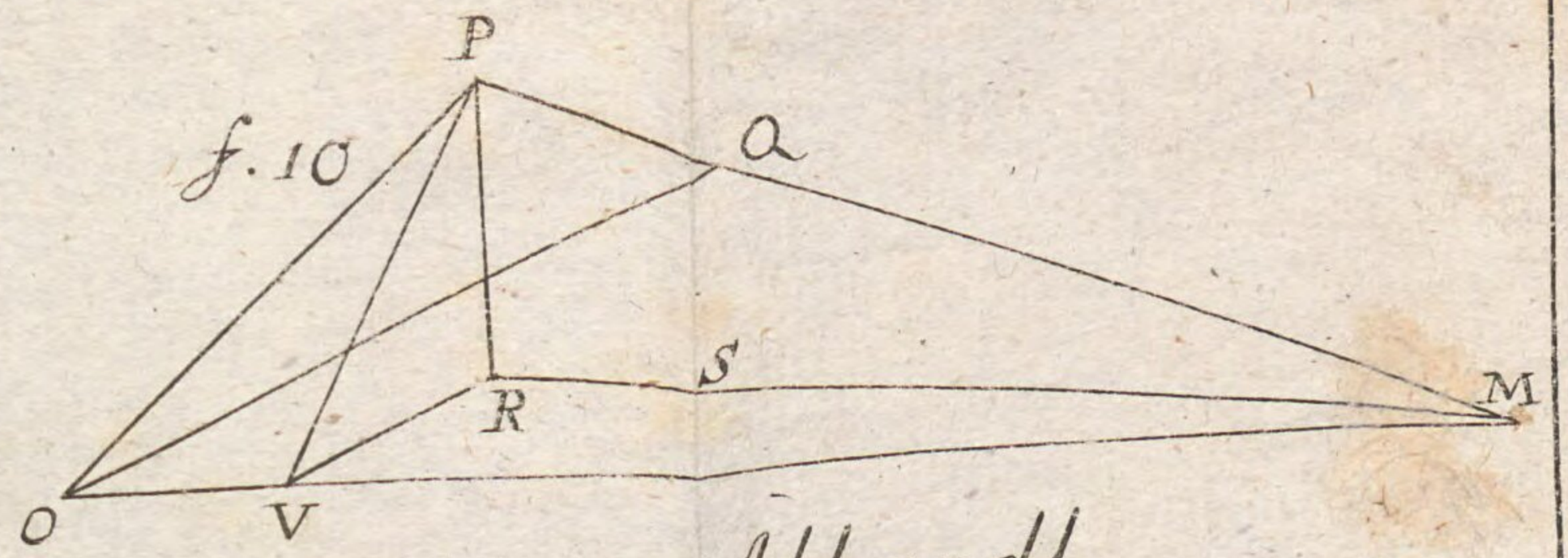
f. 8



f. 9

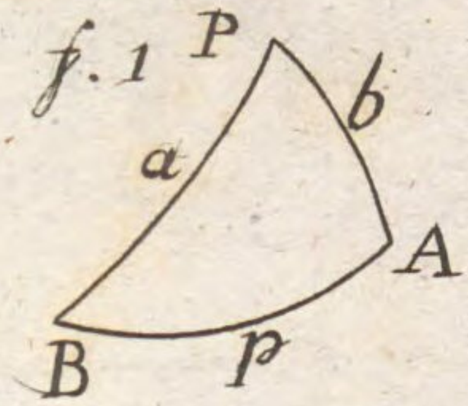


f. 10

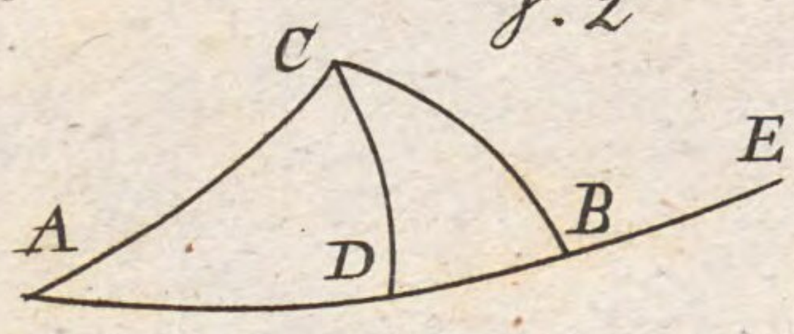


I. Abhandl.

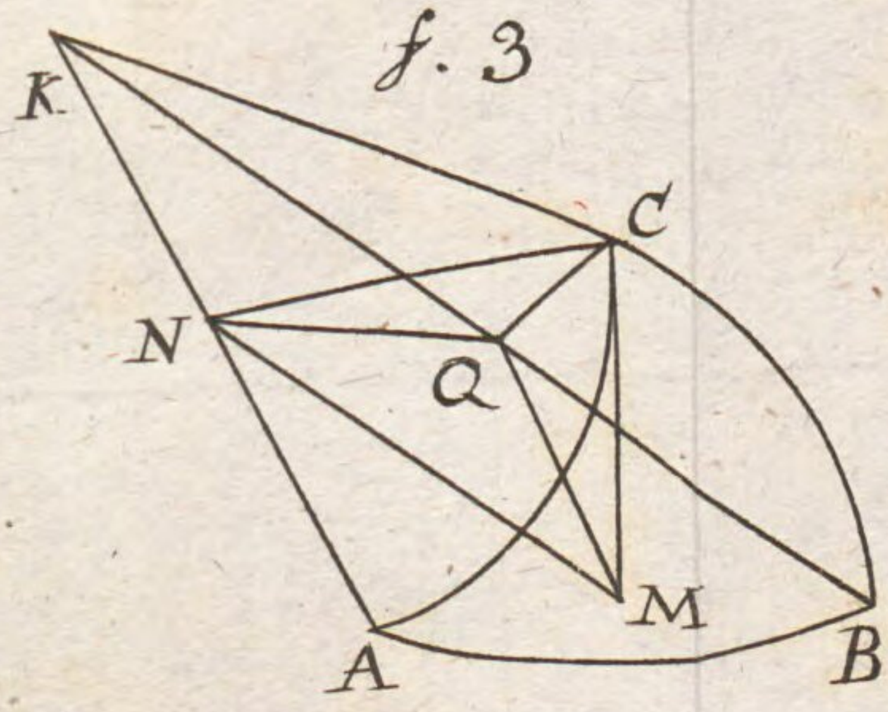
f. 1



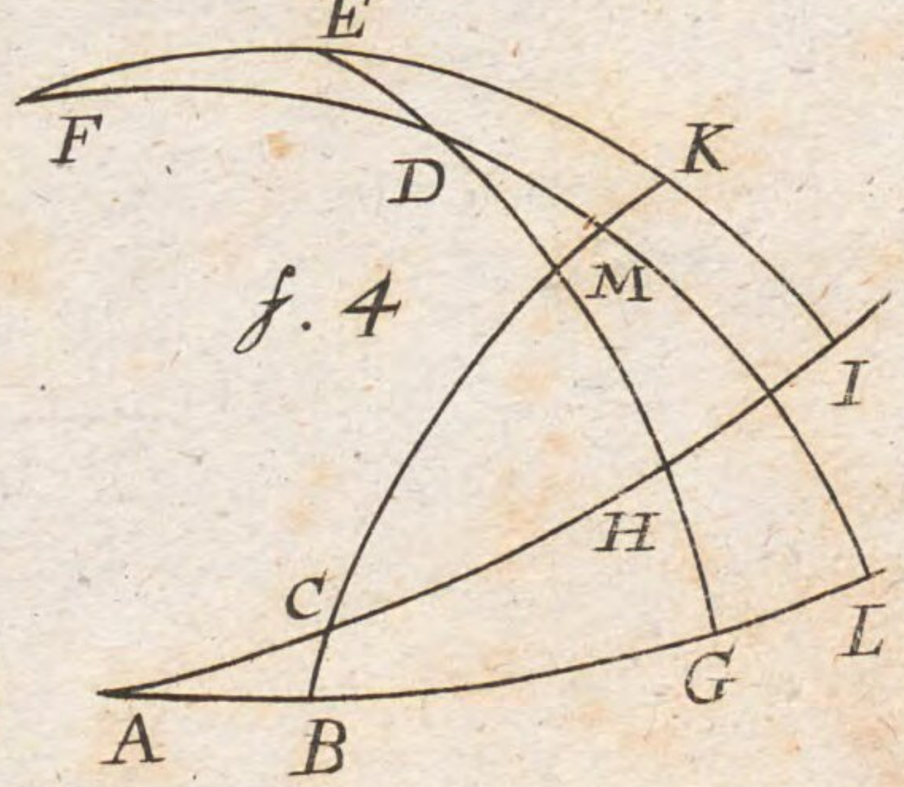
f. 2



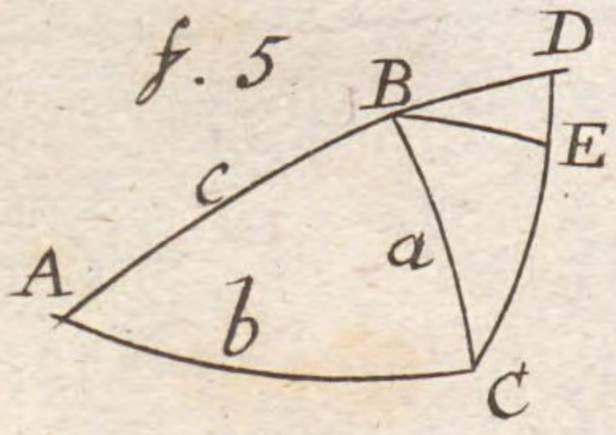
f. 3



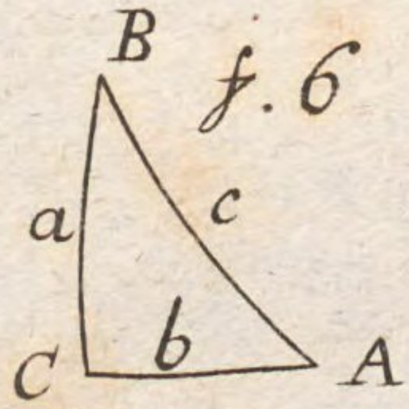
f. 4



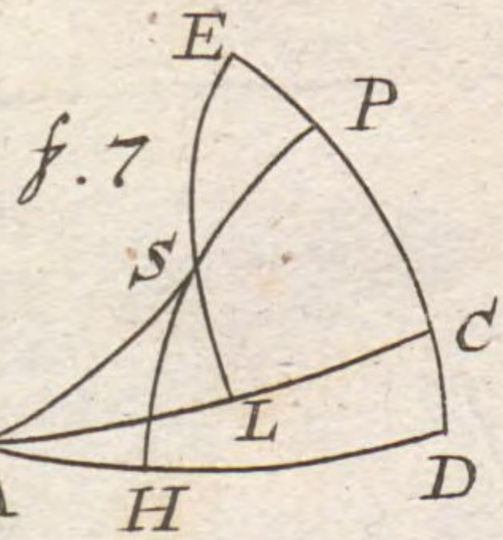
f. 5



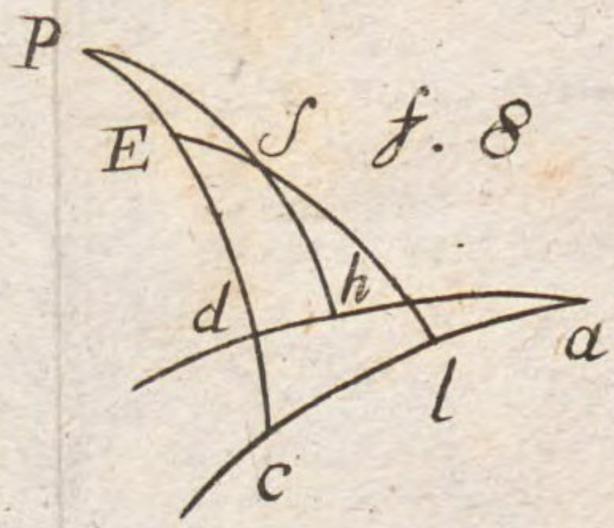
f. 6



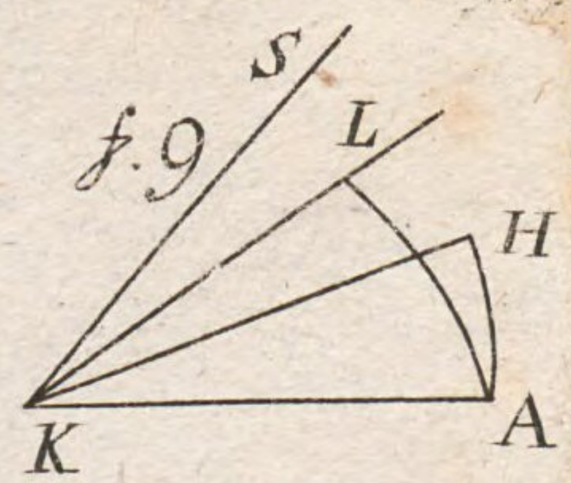
f. 7

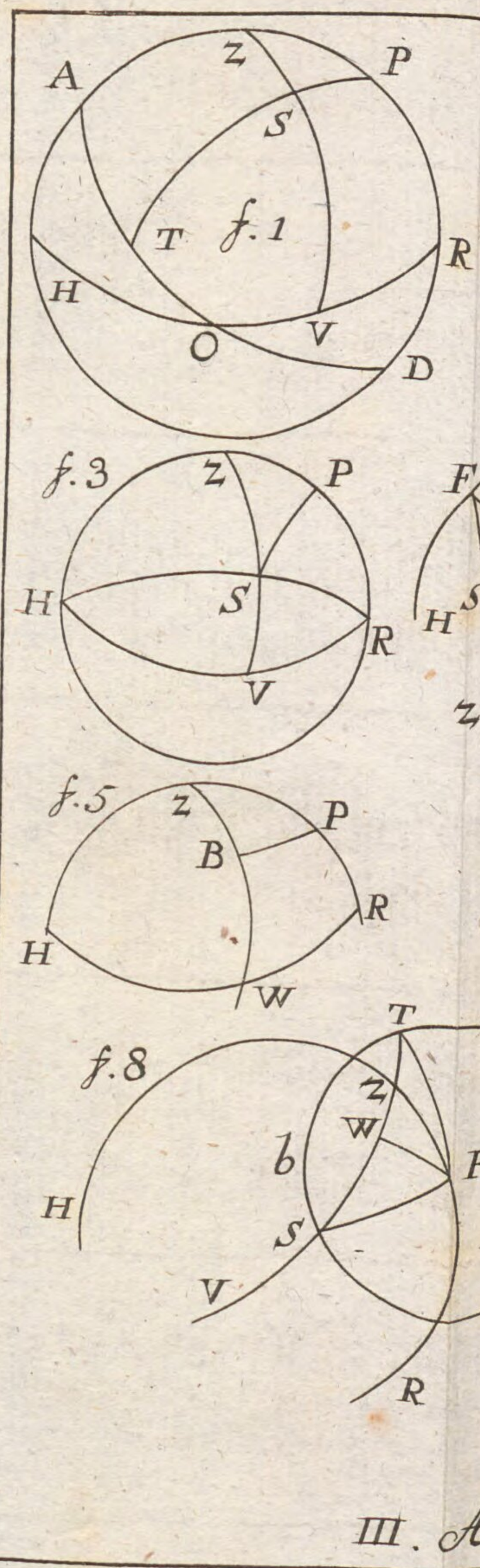


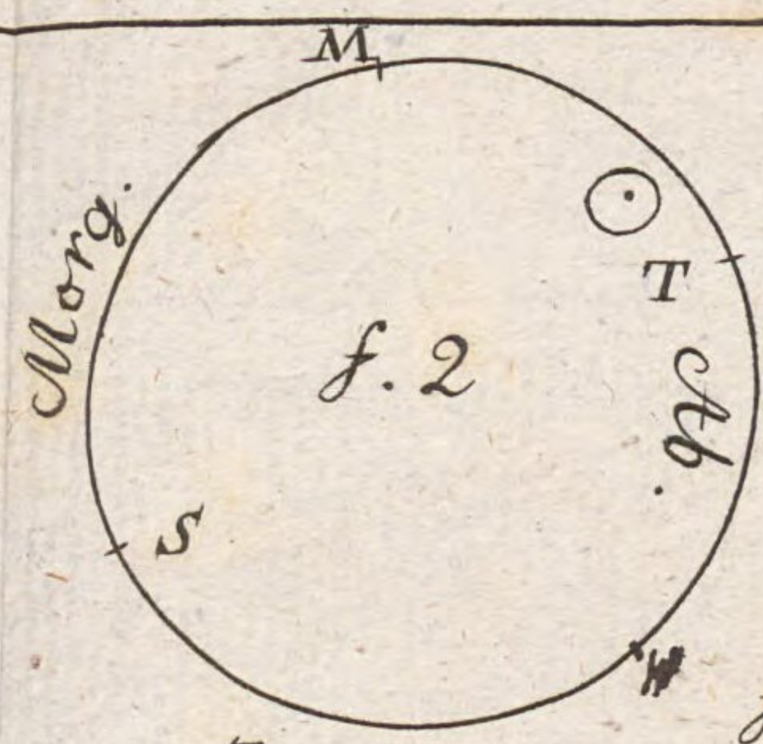
f. 8



f. 9

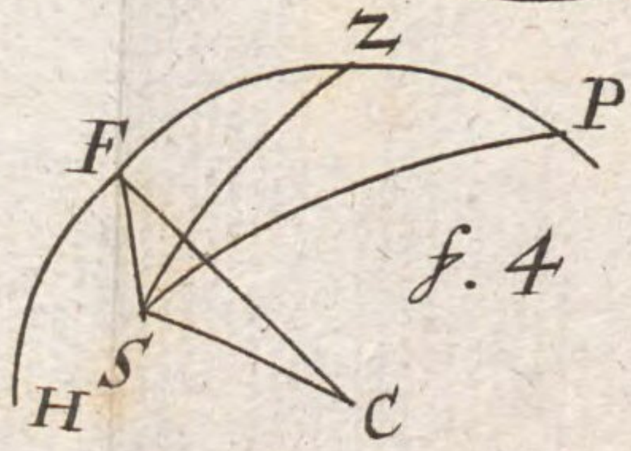


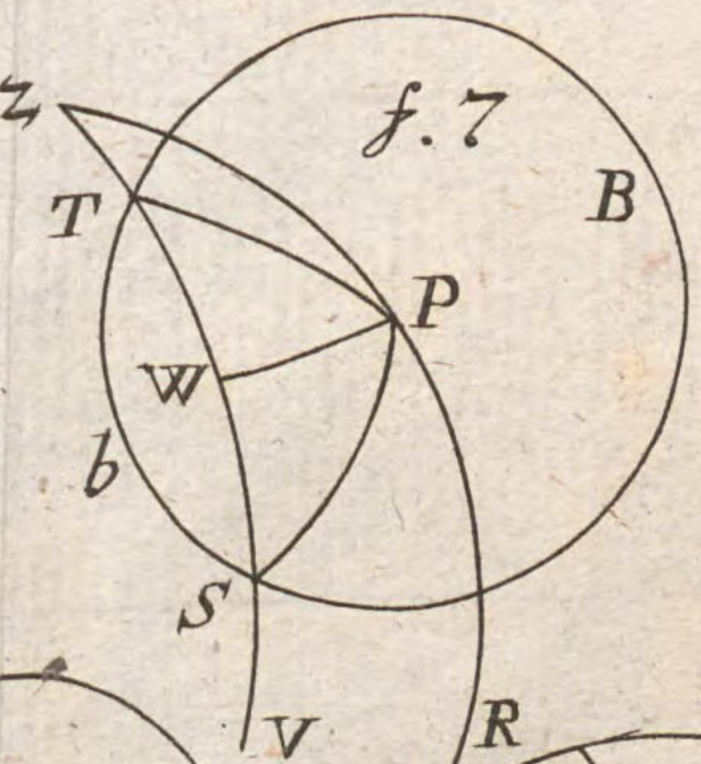

A
Z
P
S
T
f. 1
R
H
O
V
D


M
Morg.
T
Ab.
f. 2
S
W

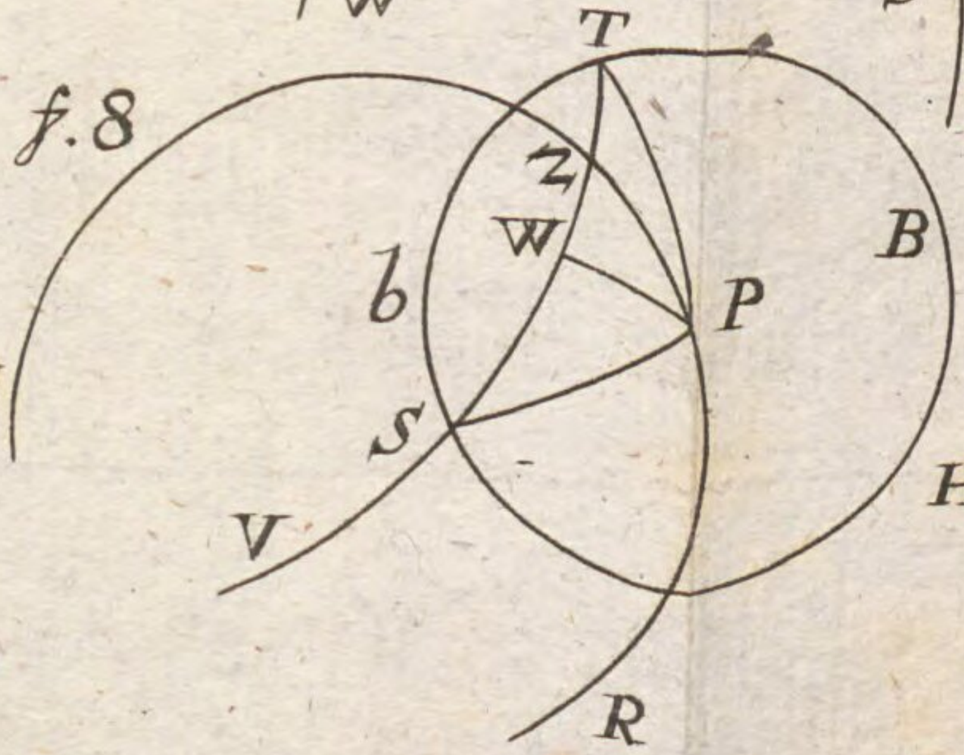
H
E
f
f. 6
C
e
F
R

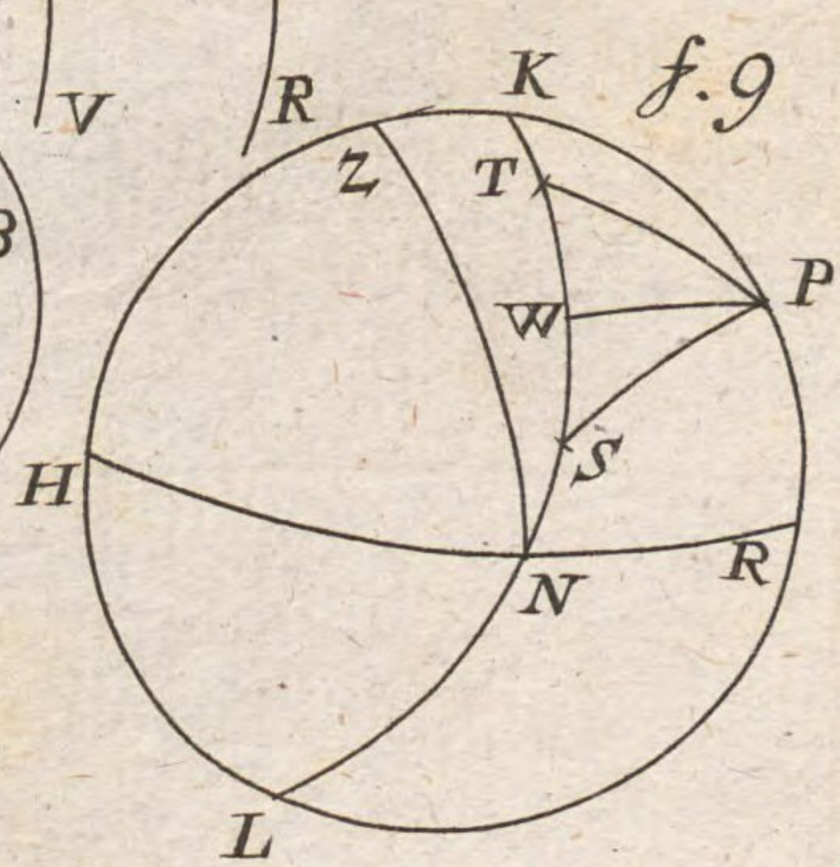
f. 3
Z
P
H
S
V
R


Z
P
F
f. 4
H
S
C

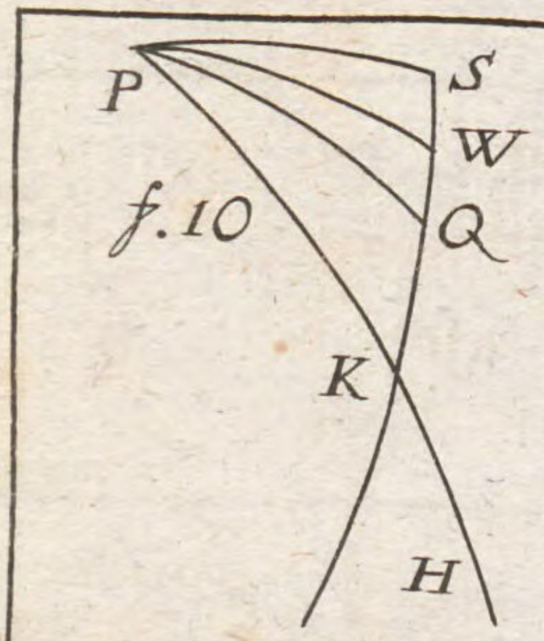

Z
f. 7
B
T
P
W
b
S
V
R

f. 5
Z
P
B
R
H
W

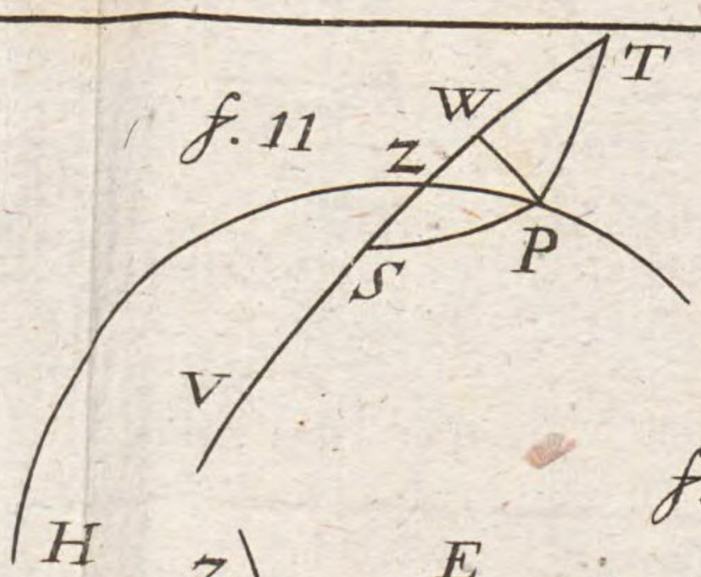

f. 8
T
Z
W
B
b
P
H
S
V
R


K
f. 9
Z
T
W
P
H
S
N
R
L

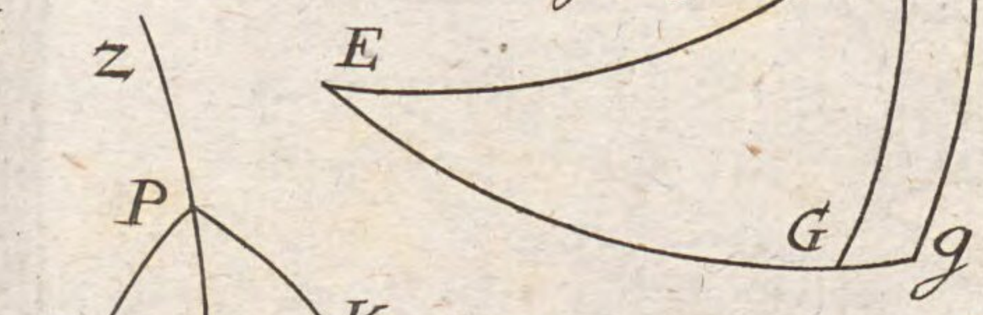
III. Abh.



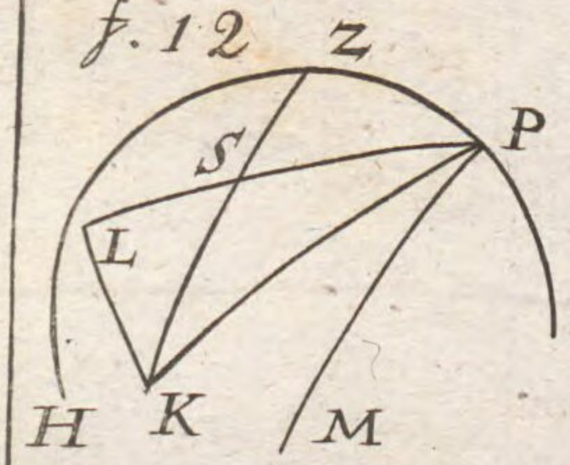
f. 10



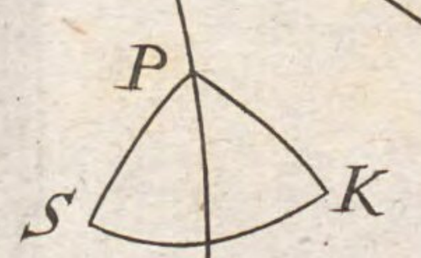
f. 11



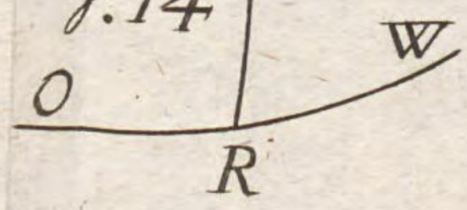
f. 13

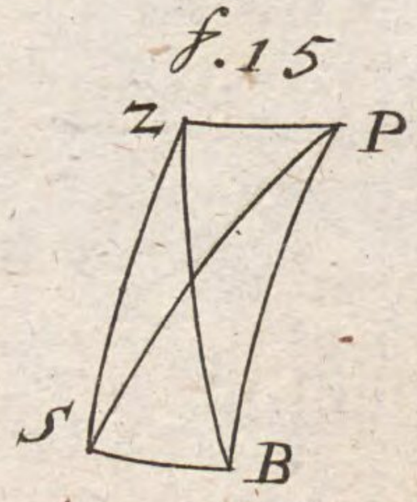


f. 12

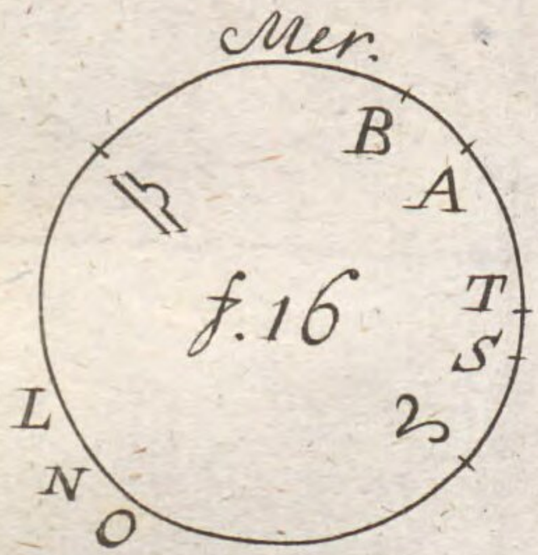


f. 14

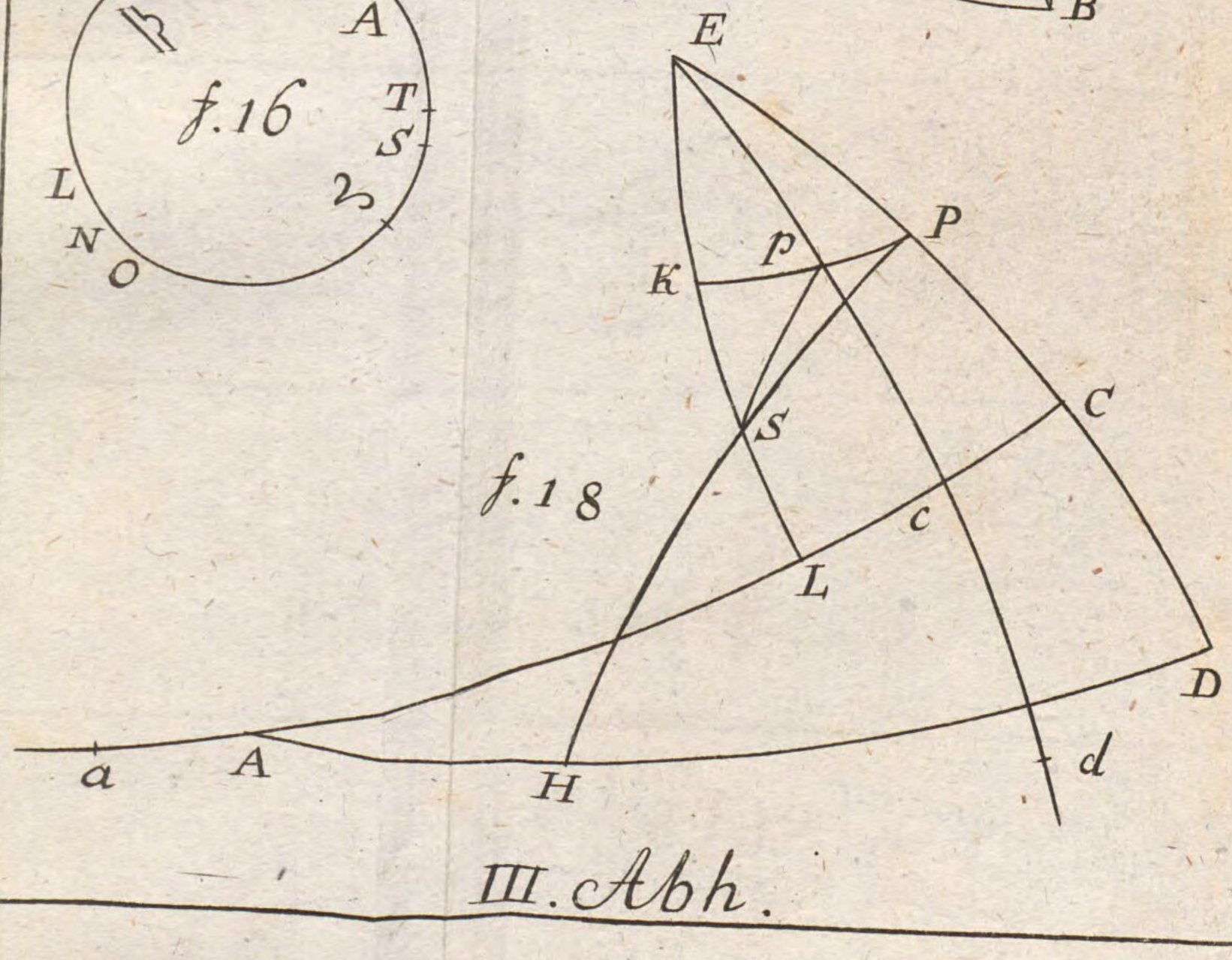




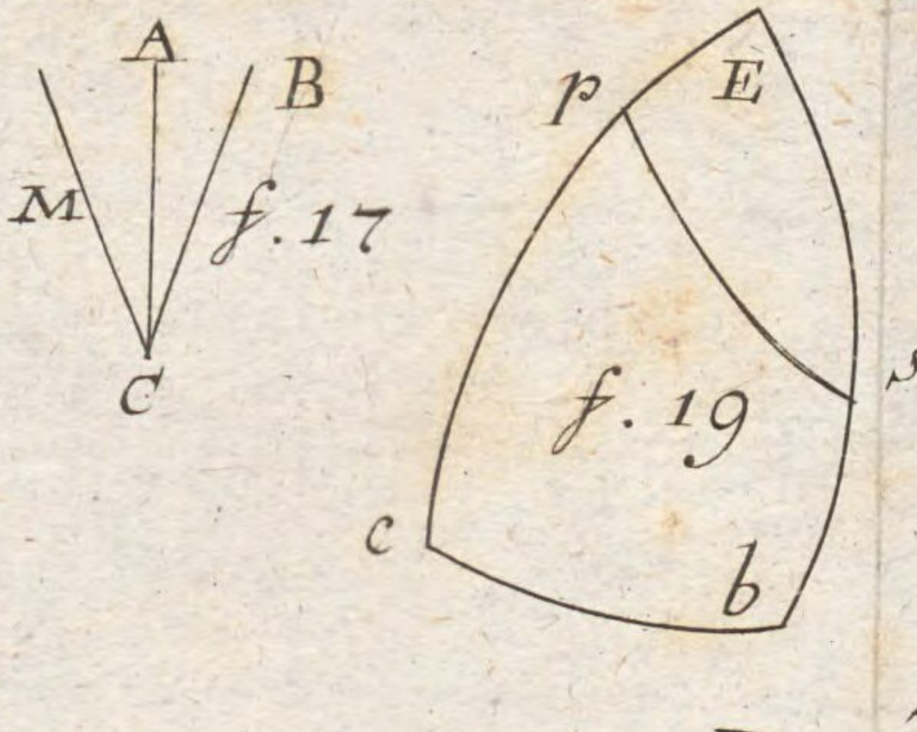
f. 15



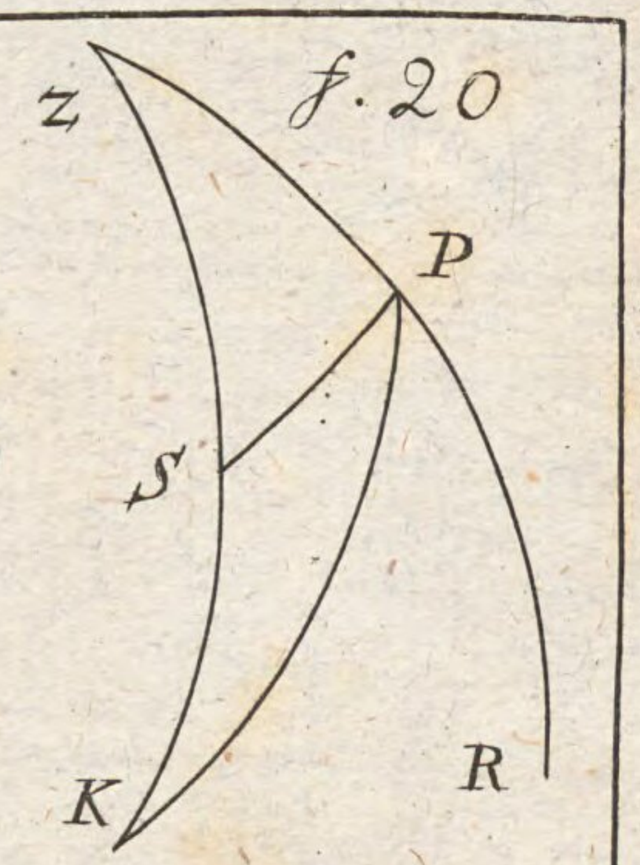
f. 16

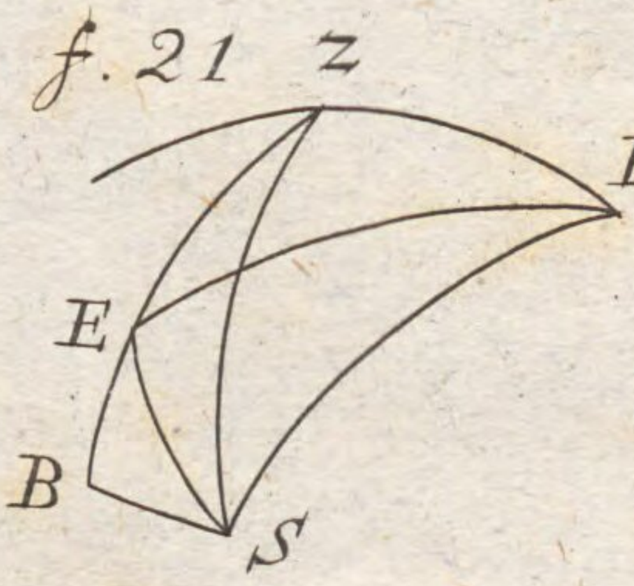


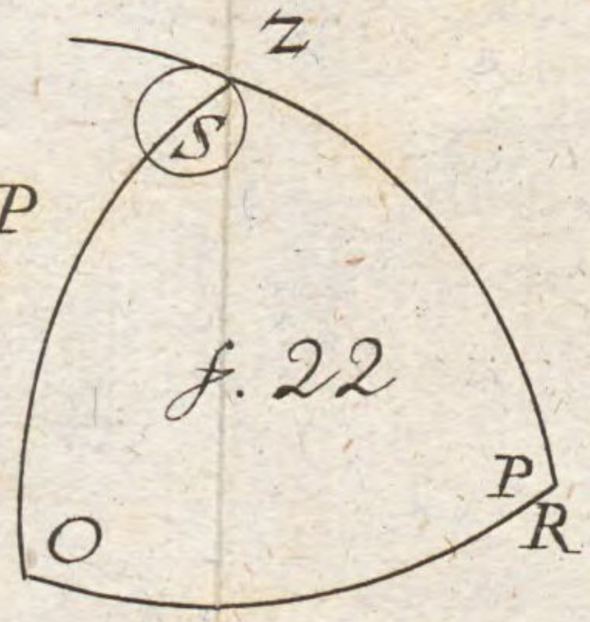
f. 18

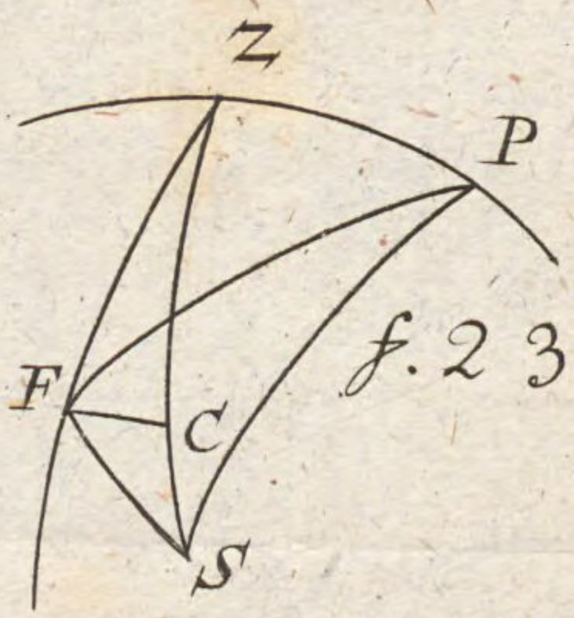

A
B
M
C
f. 17

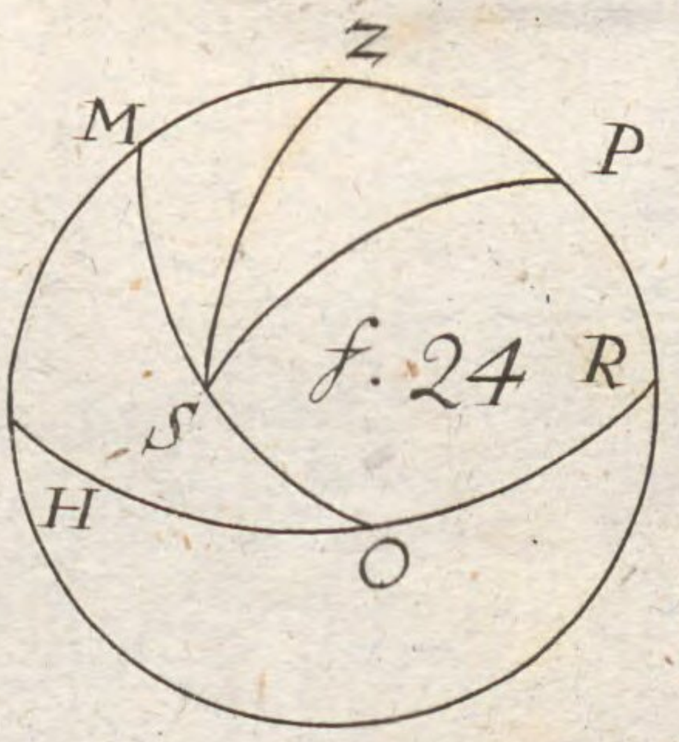
p
E
S
f. 19
c
b

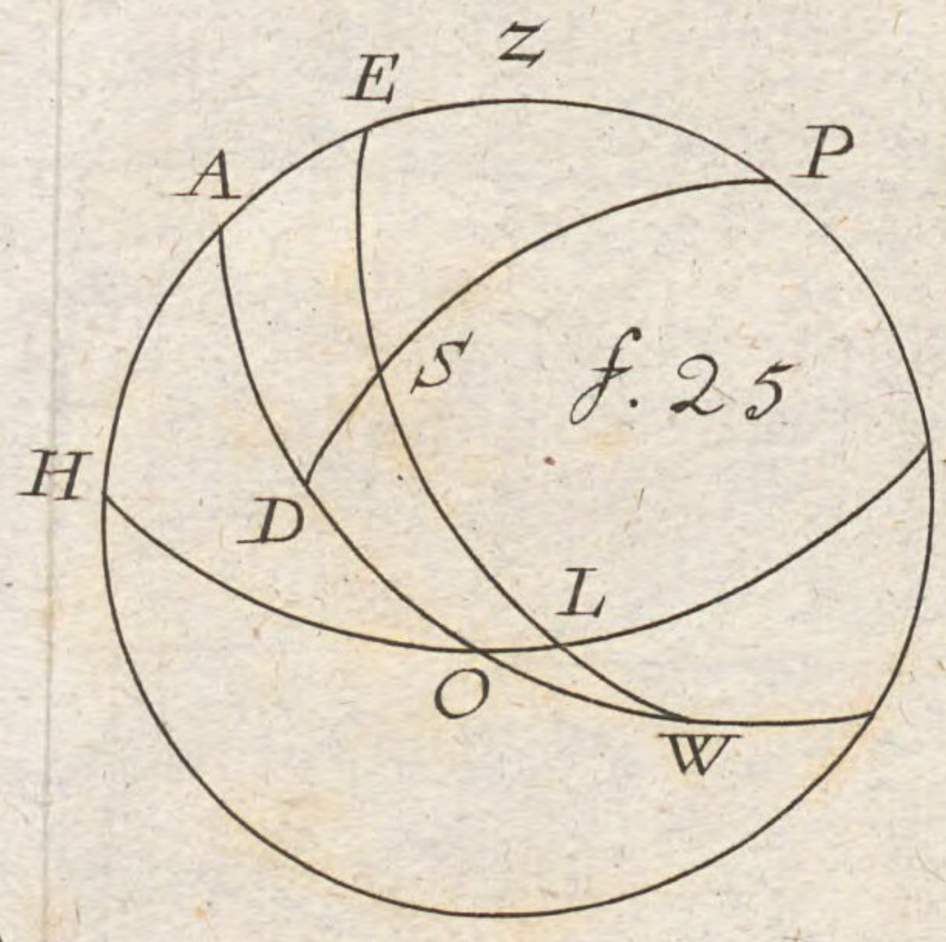

z
f. 20
P
S
K
R

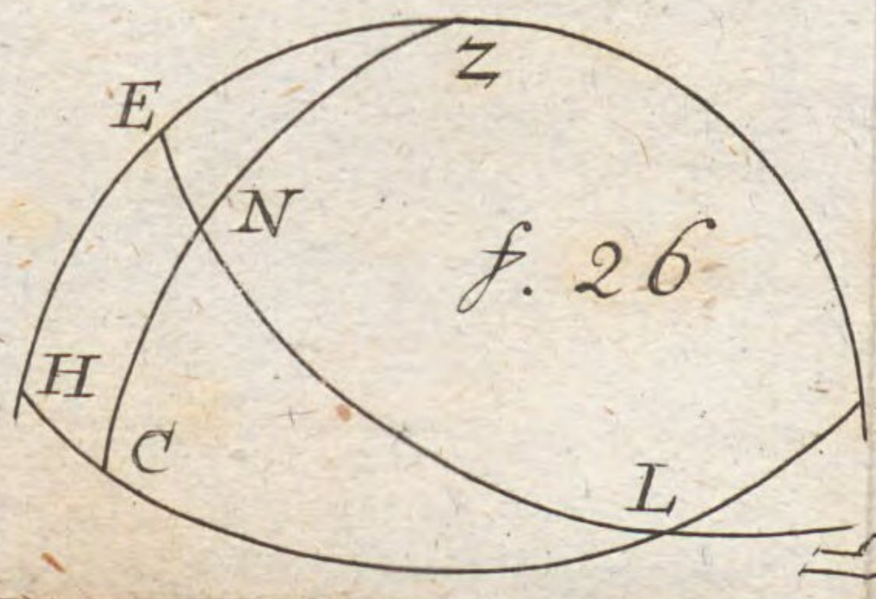

f. 21
z
P
E
B
S


z
S
f. 22
P
O
R


z
P
F
C
S
f. 23


z
M
P
f. 24
R
S
H
O


z
E
A
P
S
f. 25
R
H
D
L
O
W


z
E
N
f. 26
H
C
R
L

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kästner, Abraham Gotthelf,

Astronomische Abhandlungen zu weiterer Ausführung der astronomischen Anfangsgründe

Bd.: Erste Sammlung

Göttingen 1772

Astr.u. 90-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10060982-4
VD18 90986660